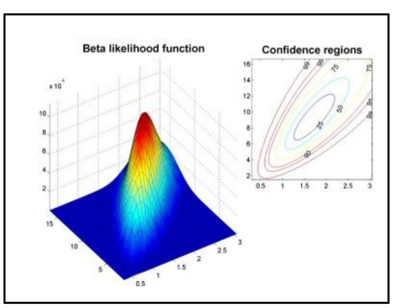
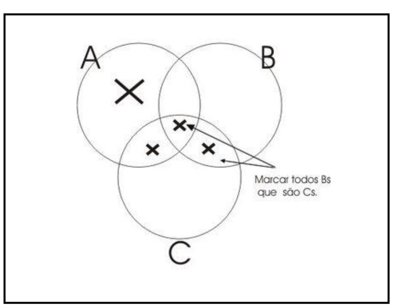
Probabilidad y Estadística I





COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA

Director General
Mtro. Jorge Luis Ibarra Mendívil

Director Académico
Profr. Julio Alfonso Martínez Romero

Director de Administración y Finanzas
C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

Director de Planeación
Mtro. Pedro Hernández Peña

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA I
Módulo de Aprendizaje.

Tercera edición 2010. Impreso en México.

DIRECCIÓN ACADÉMICA
Departamento de Desarrollo Curricular
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280

Registro ISBN, en trámite.

COMISIÓN ELABORADORA:

Elaboración:
Víctor Manuel Córdova Navarro
Ariel Ulises Cortés León

Revisión Disciplinaria:
Domitila Pérez Pérez

Revisión de Contenidos:
Adán Durazo Armenta
María Elena Raya Godoy

Supervisión Académica:
Diana Irene Valenzuela López

Corrección de Estilo:
Francisco Castillo Blanco

Edición:
Francisco Peralta Varela

Coordinación Técnica:
Claudia Yolanda Lugo Peñúñuri

Coordinación General:
Profr. Julio Alfonso Martínez Romero

Esta publicación se terminó de imprimir durante el mes de junio de 2010.
Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México
La edición consta de 5,674 ejemplares.

Ubicación Curricular

COMPONENTE:	GRUPO:
FORMACIÓN PROPEDEUTICA	FÍSICO-MATEMATICO HUMANIDADES-CIENCIAS SOCIALES

Esta asignatura se imparte en el V Semestre; tiene como antecedente Matemáticas IV; la asignatura consecuente es Probabilidad y Estadística II, y se relaciona con todas las del grupo Físico-Matemático y de Humanidades-Ciencias Sociales.

HORAS SEMANALES:	CRÉDITOS:
03	06

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: ____

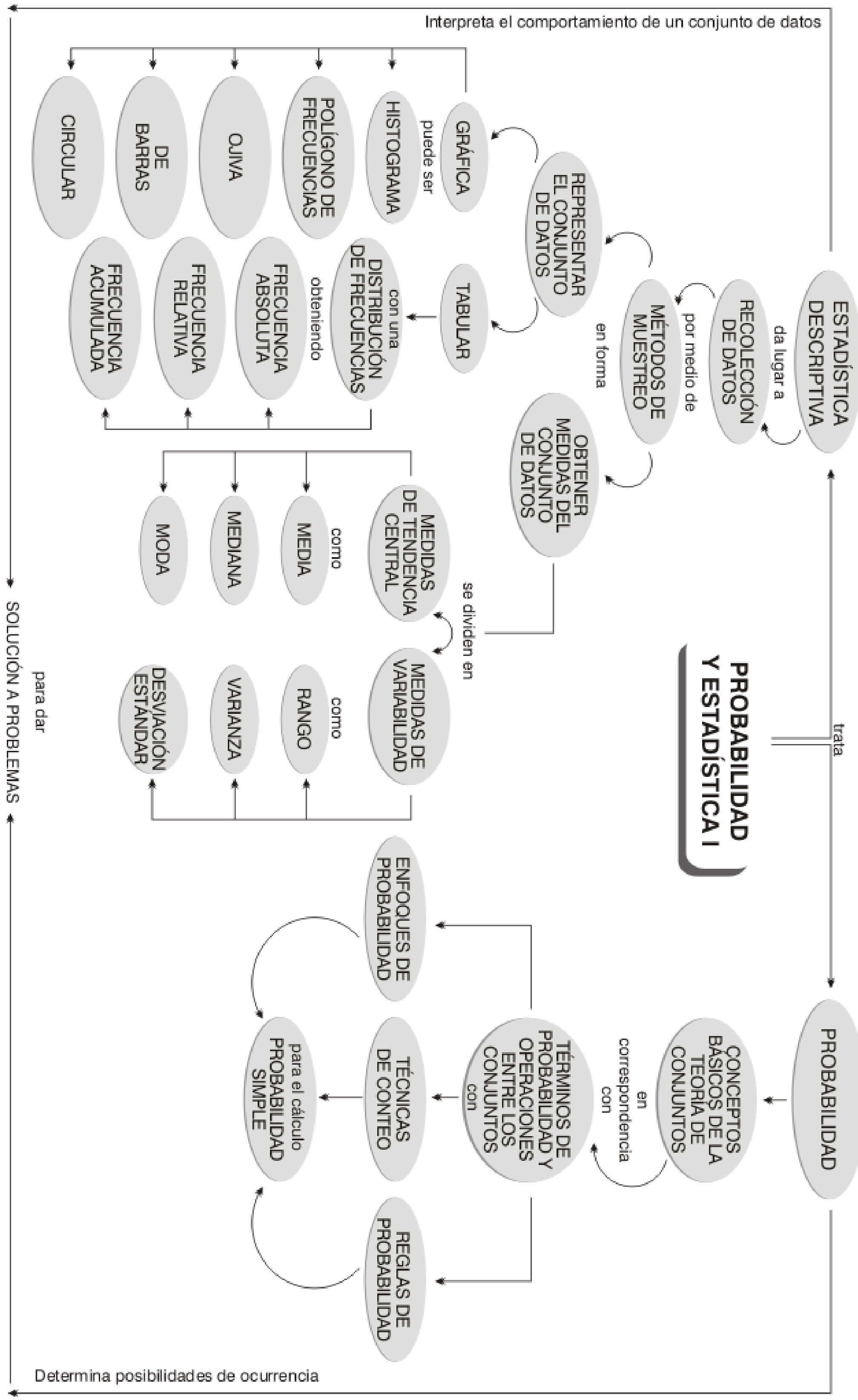
Plantel: ____

Grupo: __________ Turno: ___________ Teléfono:____________

Domicilio: ____

____

Mapa Conceptual de la Asignatura



Índice

Recomendaciones para el alumno

El presente Módulo de Aprendizaje constituye un importante apoyo para ti; en él se manejan los contenidos mínimos de la asignatura **Probabilidad y Estadística I**.

No debes perder de vista que el Modelo Académico del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora propone un aprendizaje activo, mediante la investigación, el análisis y la discusión, así como el aprovechamiento de materiales de lectura complementarios; de ahí la importancia de atender las siguientes recomendaciones:

- Maneja el Módulo de Aprendizaje como texto orientador de los contenidos temáticos a revisar en clase.
- Realiza la evaluación diagnóstica propuesta en el módulo y entrega los resultados obtenidos a tu profesor para la retroalimentación.
- Refuerza aquellos conocimientos previos propuestos que no recuerdes o domines.
- Utiliza el Módulo de Aprendizaje como lectura previa a cada sesión de clase.
- Al término de cada unidad, resuelve la autoevaluación, consulta la escala de medición del aprendizaje y realiza las actividades que en ésta se indican.
- Realiza los ejercicios de reforzamiento del aprendizaje para estimular y/o reafirmar los conocimientos sobre los temas ahí tratados.
- Utiliza la bibliografía recomendada para apoyar los temas desarrollados en cada unidad.
- Utiliza y visita los sitios de Internet que se te proponen como sitios de consulta o para ampliar el conocimiento.
- Para comprender algunos términos o conceptos nuevos, consulta el glosario que aparece al final del módulo y crea el tuyo propio para incrementar tu acervo.
- Para el Colegio de Bachilleres es importante tu opinión sobre los módulos de aprendizaje. Si quieres hacer llegar tus comentarios, utiliza el portal del Colegio: www.cobachsonora.edu.mx.

Presentación

El Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora considera entre sus propósito el proporcionar a los jóvenes sonorenses una formación básica que consolide su cultura general que incida en actitudes prácticas, positivas y propositivas en la sociedad, una formación para el trabajo que los prepare para integrarse, enfrentarse o que lo promueva en el ámbito laboral o el autoempleo y una formación propedéutica que fortalezca los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes de todos aquellos con aspiraciones personales o vocacionales, que le faciliten o permitan el acceso a la educación superior.

Con la finalidad de contribuir con la formación propedéutica mencionada es que se presenta la asignatura de Probabilidad y Estadística I en el campo de Físico-Matemático y Económico-Administrativo, de manera que el alumno vincule el conocimiento adquirido en el bachillerato con la educación superior logrando una mejor incorporación al ámbito universitario independientemente del área de conocimiento de su elección.

La importancia de la Estadística se puede remontar a épocas ancestrales y considera la necesidad del ser humano de tomar en cuenta datos de diversos hechos que resultan esenciales en su vida, como la necesidad de convivencia y organización que consideran la recolección y estudio de datos con propósitos estadísticos que le permitan desarrollarse como un ente social, económico, administrativo, belicoso, agrícola, industrial, comercial.

RIEMS

Introducción

El Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, en atención a los programas de estudio emitidos por la Dirección General de Bachillerato (DGB), ha venido realizando la elaboración del material didáctico de apoyo para nuestros estudiantes, con el fin de establecer en ellos los contenidos académicos a desarrollar día a día en aula, así como el enfoque educativo de nuestra Institución.

Es por ello, que actualmente, se cuenta con los módulos y guías de aprendizaje para todos los semestres, basados en los contenidos establecidos en la Reforma Curricular 2005. Sin embargo, de acuerdo a la reciente Reforma Integral de Educación Media Superior, la cual establece un enfoque educativo basado en competencias, es necesario conocer los fines de esta reforma, la cual se dirige a la totalidad del sistema educativo, pero orienta sus esfuerzos a los perfiles del alumno y del profesor, siendo entonces el camino a seguir el desarrollo de las competencias listadas a continuación y aunque éstas deberán promoverse en todos los semestres, de manera más precisa entrarán a partir de Agosto de 2009, en el primer semestre.

Competencias Genéricas

CATEGORÍAS	COMPETENCIAS GENÉRICAS
I. Se autodetermina y cuida de sí.	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
	2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
	3. Elige y practica estilos de vida saludables.
II. Se expresa y comunica.	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
III. Piensa crítica y reflexivamente.	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
IV. Aprende de forma autónoma.	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
V. Trabaja en forma colaborativa.	8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
VI. Participa con responsabilidad en la sociedad.	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
	10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
	11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias Disciplinares Básicas

Matemáticas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Competencias docentes:

1. Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.
2. Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
3. Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
4. Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
5. Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo.
6. Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
7. Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
8. Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

Unidad 1

Recolección de Datos

Objetivo:

El alumno:

Identificará los métodos de recolección de datos, practicará su obtención, clasificación y utilidad, mediante el manejo de conocimientos y habilidades necesarias para recopilar, organizar, presentar, analizar e interpretar los datos estadísticos inherentes a los términos básicos de la estadística y los tipos de muestreo: mostrando objetividad en el análisis de situaciones de su vida cotidiana y escolar.

Temario:

- Términos Básicos de Estadística
- Métodos de muestreo

Ejemplo: Antes de iniciar esta Unidad te recomendamos que revises los temas de la siguiente lista resolviendo algunos ejercicios y los presentes a tu profesor para que los revise y te retroalimentes con las observaciones y sugerencias que te haga de los mismos.

- Leyes de los signos para la suma.
- Leyes de los signos para el producto.
- Manejo de tablas.
- Operaciones entre números reales.
- Leyes de los exponentes.

1.1. TÉRMINOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

1.1.1. Definición de estadística y utilidad.

En esta Unidad se pretende que el alumno se forme una idea de los conceptos básicos de la estadística, con el fin de que se le facilite la introducción al curso.

En la vida cotidiana se presentan fenómenos que requieren del empleo de una serie de tablas, medidas, gráficas, de su análisis e interpretación para comprenderlos, lo cual nos lleva a plantearnos una serie de interrogantes donde para poder responderlas la Estadística día a día va ganando mayores adeptos, convirtiéndose en un método efectivo para describir con exactitud los valores y datos de situaciones problemáticas de las distintas ciencias agrícolas, biológicas, de salud, económicas, educativas, físicas, políticas, psicológicas, sociales, etcétera.

Se llama **Estadística** a la rama de las matemáticas que se sirve de un conjunto de métodos, normas, reglas y principios para la observación, toma, organización, descripción, presentación y análisis del comportamiento de un grupo de datos para la conclusión sobre un experimento o fenómeno.

Estadística

- Rama de las matemáticas que estudia los datos cuantitativos reunidos por observación con el fin de estudiar y comparar las fuentes de varianza de los fenómenos, de aceptar o de rechazar las hipótesis que afectan a las relaciones entre los fenómenos y de ayudar a hacer unas inferencias a partir de las observaciones. ***Kerlinger De Landsheere.***
- Es la técnica o proceso matemático de recolección, descripción, organización, análisis e interpretación de datos numéricos. Constituye un instrumento fundamental de medida y de investigación dada su capacidad de expresión cuantitativa. ***Mario Tamayo***
- Conocimiento de las relaciones, características o propiedades de los fenómenos que se repiten o se presentan con cierta regularidad llegando a constituir una clase especial de fenómenos. ***Mario Tamayo.***
- En el lenguaje corriente, el término se suele usar en dos sentidos diferentes. En plural (estadísticas), como sinónimo de ordenación de datos numéricos (por ejemplo, estadísticas de viviendas construidas por intermedio del banco hipotecario); en singular, el término se aplica a la ciencia estadística, cuyo objeto es el de recopilar, presentar, analizar e interpretar datos, referentes a hechos, con el fin de estudiar fenómenos susceptibles de expresión numérica. ***Ander Egg.***
- Referente a los métodos para la obtención de datos, su análisis y resumen, así como la deducción de las consecuencias a partir de las muestras obtenidas de los eventos. ***C. Monroy Olivares***

Datos históricos de la estadística:

Se considera fundador de la Estadística al profesor y economista alemán, Godofredo Achenwall (1719 –1772) quien, fue profesor de la Universidad de Leipzig, escribió sobre el descubrimiento de una nueva ciencia que llamó *Estadística* y la definió como "el conocimiento profundo de la situación respectiva y comparativa de cada Estado".

Achenwall y sus seguidores estructuraron los métodos estadísticos que se orientaron a investigar, medir y comparar las riquezas de las naciones, no significa que antes de los estudios de Godofredo Achenwall, los estados únicamente efectuaban listados de propiedades o censos (del latín **censere** que significa valuar o tasar) se efectuaron desde la antigüedad para conocer las propiedades del gobierno.

Se cree que de 2000 a 2500 A.C., los chinos y los egipcios efectuaron censos que eran simples inventarios elementales. Desde su creación la Estadística se ha enriquecido continuamente con los aportes matemáticos, filosóficos y científicos. ***Lincoyan Portus.***

La **utilidad** de la estadística se aplica en la actividad Industrial, Medicina, Biología, Educación, Banca y Comercio y otras. Por mencionar las aplicaciones en la administración de las empresas, al hacer los registros de las operaciones comerciales, van acumulando los resultados, ya sean perdidas o utilidades, se hacen estudios de mercado y se interpreta en graficas estadísticas y se utilizan en la toma de decisiones. ***Anderson-Sweeney-Williams***

Contabilidad. Los contadores pueden aplicar los pronósticos de Ventas o Cuentas por Cobrar, así con los resultados obtenidos pueden fijar nuevas estrategias de crédito.

Finanzas. Los asesores financieros, interpretaran estadísticamente el comportamiento de las utilidades que se han obtenido en los últimos periodos y pueden hacer nuevos inversiones.

Mercadotecnia. Se utiliza para posicionar los productos, fijar precios, bajar los costos por publicidad de acuerdo a los resultados obtenidos.

Producción. Sirve para ver la demanda de producción e identificar de inmediato las variaciones de control de inventarios en camino y en almacén.

Economía. Se aplica en esta actividad la estadística, porque esta muestra el crecimiento económico de las empresas y del país.

Los resultados de la aplicación de la estadística se conocen al leer el periódico o al escuchar por la radio y/o televisión los siguientes desplegados o mensajes:

- ✓ El mercado de valores se mantuvo sin cambios en relación a años anteriores, según el Banco de México.
- ✓ La población del estado se forma por 51% son mujeres y el 49% hombres, según el INEGI.
- ✓ En la Universidad de Sonora ha disminuyeron la deserción estudiantil el 2%.
- ✓ El comercio electrónico aporta en impuestos al valor Agregado 10 millones anuales según la SHCP.

Para llevar a cabo el estudio, se sigue el siguiente Proceso de Investigación:

Etapas del Proceso de Investigación.
1. Establecer la necesidad de información
2. Especificar los objetivos de investigación
3. Determinar las fuentes de datos
4. Desarrollar las formas para recopilar los datos
5. Diseñar la *muestra*
6. Recopilar los *datos*
7. Procesar los datos
8. Analizar los datos
9. Presentar los resultados de la investigación en un reporte

1.1.2. Clasificación de la Estadística

La estadística tiene básicamente dos divisiones:

La **Estadística Descriptiva:** es la parte de la Estadística que estudia las técnicas y métodos que sirven para la observación, toma, organización, descripción, presentación y análisis de datos.

La **Estadística Descriptiva:** Es aquella que utiliza técnicas y medidas que indican las características de los datos disponibles. Comprende el tratamiento y análisis de datos que tienen por objeto resumir y describir los hechos que han proporcionado la información, y que por lo general toman la forma de tablas, gráficos, cuadros e índices. Se llama descriptiva por ser su fin primordial la descripción de las características principales de los datos obtenidos. ***Mario Tamayo.***

TAREA 1 y 2

Páginas 23 y 25.

La **Estadística Inferencial o Analítica:** es la parte de la Estadística mediante la cual se intenta dar explicación, concluir o inferir sobre los experimentos y fenómenos observados, mediante el auxilio de la probabilidad, estadística descriptiva y distribución de probabilidad, por lo que resulta una herramienta de suma utilidad para la toma de decisiones.
La ***Estadística Inferencial:*** Es el conjunto de técnicas y cálculos que auxilian al investigador sobre la posible influencia de la variable independiente sobre los resultados y a generalizarlos a la población de la cual se tomó la muestra para el estudio. ***Mario Tamayo***.

> Ejemplo 1: Se puede citar el caso de un sociólogo, quien pudiera estar interesado en investigar en una muestra de 750,000 conductores de automóviles, quienes son más agresivos, los hombres o las mujeres.

Para la realización de este experimento, y debido al gran número de personas que habría de sondear, queda fuera de consideración el hecho de observar a todos los conductores de automóvil. Por lo que sería necesario estudiar sólo un pequeño grupo de ellos (muestra), siendo ésta la parte que le corresponde a la estadística descriptiva: El hecho de observar a los conductores, tomar y anotar los datos de forma organizada, hacer una descripción del carácter y sexo del individuo observado, hacer una presentación de los datos obtenidos y por último, analizar los resultados de la muestra.

TAREA 3

Página 27.

Sin embargo, al estar en observación sólo un grupo representativo de conductores, cabe la posibilidad de que las conclusiones a las que se pudieran llegar no sean tan precisas y podría no tenerse la certeza de que se ha tomado la inferencia correcta.

Es aquí donde entra en juego la estadística inferencial, al considerarse como una ayuda para la toma de decisiones cuando las condiciones de certidumbre están en juego. La estadística inferencial nos proporciona los métodos que nos permiten estimar el grado de confiabilidad de las conclusiones. Por lo que en cada proposición estadística hecha, se debe indicar la probabilidad de ocurrencia de los actos observados o descubrimientos hechos para así tomar decisiones que sean aplicables a todos los conductores de automóviles.

1.1.3. Definiciones.

Se le llama **Población** a la cantidad total de cualquier conjunto completo de datos, objetos, individuos o resultados que tengan alguna característica en común que se va a observar o analizar en un problema o experimento. Denotaremos al tamaño de la población por "N".

En nuestro ejemplo 1 se considera como población a todos los conductores de automóviles. Así:

N = 750,000

El significado estadístico que se le da al término población es más amplio que el usual, ya que puede referirse a actos, áreas geográficas, cosas, datos, objetos, individuos, resultados, e incluso a temperaturas o tiempos.

"**Una población** es un conjunto de todos los elementos que estamos estudiando, acerca de los cuales intentamos sacar conclusiones". Levin & Rubin (1996).

"**Una población** es un conjunto de elementos que presentan una característica común". Cárdenas (1974).

Se le llama **Muestra** a cualquier subconjunto de elementos de la población. El interés de la Estadística es proporcionar métodos que permitan elegir una muestra de datos representativos destinado a suministrar información a cerca de una población, será fundamental que los elementos deben tener todas las características de la población.

"**Se llama muestra** a una parte de la población a estudiar que sirve para representarla". Murria R. Spiegel (1991).

"**Una muestra** es una colección de algunos elementos de la población, pero no de todos". Levin & Rubin (1996).

"**Una muestra** debe ser definida en base de la población determinada y las conclusiones que se obtengan de dicha muestra solo podrán referirse a la población en referencia", Cadenas (1974).

Denotamos al tamaño de la muestra por "n". En nuestro ejemplo una muestra podría ser: 500 conductores elegidos al azar, en este caso quedará

Muestra n = 500 y
Población N =750,000

Las características de la muestra dependen del criterio del muestreo empleado para su determinación. Sin embargo, para que una muestra sea representativa de la población, ésta deberá contener aproximadamente entre el 5 % y el 10 % de los datos de la población cuando ésta es finita, además los elementos de la muestra deben ser escogidos al azar (a la suerte) y se deben observar todas las características que se observan en la población.

Se le llama **Variable** a la cualidad o cantidad medible de cualquier suceso o acción que presente o experimente un cambio, la podemos representar mediante un símbolo **(X, Y, Z, α, β, γ, δ)** y al cual se le puede asignar un valor cualquiera de un conjunto determinado de datos.

Le llamamos **Variable Aleatoria** a aquella variable cuyos cambios no pueden ser determinados antes de que estos se presenten; es decir, están destinados a la suerte. También se le conoce como **Variable Probabilista, Cabalística, de Azar o a la Suerte.**

Tipos de variable

Para su estudio, las variables aleatorias se han clasificado según la naturaleza de los valores que toman en:

1. Variables Numéricas:
   a) Variables Numéricas Discretas
   b) Variable Numérica Continua

2. Variables Categóricas:
   a) Variables Categóricas Nominales
   b) Variables Categóricas Ordinales

Variables Numéricas o Cuantitativas: son aquellas que se identifican o se les puede asignar un valor numérico o que corresponden a aspectos que son medibles.

> Ejemplo: Tiempo de uso, precio, tamaño, velocidades, número de hijos de una familia, número de carros que circulan por determinada calle, alturas, pesos, tallas, temperaturas, tiempo de vida de una persona, cantidad de azúcar para endulzar un café, medida de sombreros, etcétera.

Las variables numéricas se dividen en:

Variables Numéricas Discretas: son aquellas que solamente toman valores enteros con rango finito.

> Ejemplo: Número de hijos en cada familia de una colonia de la ciudad, talla de calzado de cada alumno de un grupo escolar, la cantidad de alumnos por grupo, etc.

Variable Numérica Continua: son aquellas que pueden tomar cualquier valor entre dos valores dados. Es decir, el rango contiene no sólo valores enteros sino un intervalo (finito o infinito) de valores reales (esto es, que puede ser fraccionario, decimal o irracional).

> Ejemplo: El tiempo de vida de una persona, la cantidad de azúcar para endulzar un café, el nivel de hemoglobina de los habitantes de una colonia, la temperatura ambiental durante un día, etcétera.

Variables Categóricas o Cualitativas: son aquellas a las que no se les puede asignar o identificar con un valor numérico, sino con un aspecto, cualidad o característica que las distinga y que no se pueden medir sino solo observar, a ese aspecto, cualidad o característica se le llama categoría.

> Ejemplos: Marca, tipo de sangre, deporte preferido, el estado en general de cualquier cosa, idioma, nacionalidad, colores, cabello o piel, himnos nacionales, sexo, estado de ánimo, clima, etcétera.

En las variables categóricas, un elemento no puede estar en dos o más categorías a la vez, lo cual las hace excluyentes y además no puede haber elementos de la población que no pertenezcan a alguna categoría, lo cual las hace exhaustivas.

Las variables categóricas se dividen en:

Variables Categóricas Nominales: son aquellas a las que no se les puede asignar un orden, es decir que sólo permite clasificación en categorías por mención de ésta.
Ejemplo: La nacionalidad de una persona, idioma, sexo, himnos nacionales.

Variables Categóricas Ordinales: son aquellas que además de clasificar a los elementos en distintas categorías les podemos asignar un orden o que podemos ordenar de acuerdo a cierta característica.

> Ejemplo: El estado de salud de una persona; que podemos ordenarla según la urgencia del caso, el color de algún objeto según la tonalidad desde muy clara a más oscuro; que podemos ordenarlo de acuerdo a la intensidad del color, el grado militar, puesto en la empresa, día de la mamá, meses del año, etcétera.

Se le llama **Datos** a las agrupaciones de cualquier número de observaciones relacionadas. Para que se considere un dato estadístico debe tener dos características:

a) Que sean comparables entre sí.
b) Que tengan alguna relación.

La recolección de información o recopilación de datos estadísticos se divide en:

Datos Internos: son aquellos datos que no necesitan de observaciones adicionales al experimento; es decir, no es necesario buscar características que proporcionen información adicional acerca del experimento. Ejemplo: Las calificaciones de un grupo, un experimento químico, etcétera.

Datos Externos: estos datos pueden ser de dos tipos:

a) **Datos Bibliográficos:** son aquellos ya conocidos y que podemos encontrar fácilmente utilizando bibliografía, registros, actas, etcétera, como los datos históricos, censos y otros.
b) **Datos Originales:** son aquellos que podemos obtener mediante métodos de recolección, como las encuestas, plebiscitos, referéndum, y nos proporcionan datos reales y certeros.

Para **Organizar los datos:** existen muchas formas de clasificarlos, en general pueden ser determinados de acuerdo a cuatro elementos que son: Tiempo, lugar, cantidad y cualidad.

Presentación de Datos: después de la organización de los datos, la información se resume en Tablas Estadísticas con base en arreglos formados de renglones y columnas, adecuados según cronología, geografía, análisis cuantitativo o cualitativo.

Los principales **elementos de una tabla estadística** son: Título, unidades, encabezado, cuerpo o contenido, nota de pie y referencias; la información contenida en una tabla estadística también se puede presentar mediante graficas, siendo las más comunes las de líneas, barras, pictográficas, cronogramas, circulares o de pastel, histograma y polígono de frecuencias.

Se le llama **Experimento** a toda acción o prueba que se realiza con el fin de observar su resultado. Existen dos tipos de experimentos, que son:

Experimento Determinista: son aquéllos en los que se puede predecir con certeza su resultado antes de que éste se presente.

> Ejemplo: Al lanzar en un cuarto un libro al aire con el fin de determinar si flota, se queda unido al techo o cae al suelo, sabemos con certeza que el libro caerá al suelo, lo cual lo hace un experimento determinista.

Experimento Aleatorio, Probabilista, casual o de azar: hablar de aleatorio, probabilista, casual o azar es hablar de algo que está determinado a la suerte. Así, decimos que un Experimento Aleatorio ocurre cuando no es posible asegurar el resultado que se va a presentar.

> Ejemplo: Al lanzar una moneda al aire no sabemos si el resultado va a ser águila o sello, lanzar un dado, etcétera.

Se llama **Muestreo** al estudio que se hace de una población por medio de muestras representativas, debidamente elegidas de manera que posea todas las características de una población y de tamaño determinado según la precisión que de ella se quiere obtener en las decisiones y conclusiones estadísticas posteriores.

Se le llama **valores estadísticos, estadísticos muestrales o simplemente estadísticos** a los valores o cantidades desconocidas que son obtenidas de, o que hacen referencia a las características de una muestra.

Se le llama **Parámetro parámetros poblacionales o simplemente parámetros** a los valores o cantidades desconocidas que son obtenidas de, o que hacen referencia a las características de una población.

1.2. MÉTODOS DE MUESTREO

1.2.1. Definición de muestreo, censo, poblaciones finitas e infinitas.

Llamamos *Censo* al método de recolección de datos mediante el cual la información se obtiene del estudio de todos los elementos que componen a la población o universo bajo estudio.

Un censo debe cumplir las condiciones de universalidad (censar a todos los elementos de la población) y simultaneidad (realizarse en un momento determinado).

El término censo no sólo se aplica a aquellos estudios que comprenden todas las unidades del país y que se realizan con frecuencia de recolección quinquenal o decenal, como es el caso de los censos de población, económicos, agropecuarios, etcétera, sino también a cualquiera independientemente de su cobertura geográfica, número de unidades de información, o frecuencia de su recolección, siempre que incluya todas las unidades que componen el universo que se investiga.

Una **Población es Finita:** cuando existe una cantidad determinada de elementos por analizar; esto es, una cantidad de elementos, numerable y que en determinado momento finaliza.

Ejemplo:

a) Los habitantes del municipio de Cajeme.

Una **Población es Infinita** cuando existe una cantidad indeterminada de elementos por analizar; es decir, una cantidad de elementos que aunque los enumeráramos nunca terminaríamos de hacerlo.

Ejemplo:

1. Los valores de temperatura durante un día.
2. Todos los puntos de una línea.
3. Número de alumnos del Cobach del presente y en el futuro.

1.2.2. Métodos de muestreo

Fundamentalmente el muestreo es de dos tipos básicos:

Probabilístico o aleatorios: tipo de muestreo que se obtiene mediante sorteo de los individuos que la forman teniendo así, cada individuo la misma posibilidad de pertenecer a la muestra, permitiendo calcular el posible error de la muestra. De entre los que destacan, el muestreo aleatorio simple, el sistemático, el estratificado y el de conglomerados.

No probabilística: tipo de muestreo en el que no es posible estimar la probabilidad de que cada individuo o elemento estará incluido en la muestra, además no permite el cálculo del posible error de la muestra. Pueden ser de tres clases: Accidental o incidental, por cuotas, intencional por conveniencia o de juicio. Aunque este tipo de muestreo no será objeto de estudio en este curso.

El muestreo **Aleatorio simple** es el tipo de muestreo en el cual todos y cada uno de los elementos de la población se elige de tal forma que tengan la misma posibilidad de ser seleccionados y pertenecer a la muestra.

El muestreo **Sistemático** se utiliza cuando el universo es de gran tamaño o ha de extenderse en el tiempo y requiere de una selección aleatoria inicial de observaciones seguida de otra selección de observaciones, obtenida mediante una constante denominada constante de sistematización

Cs= N/n; donde N = es el tamaño de la población y
n = el tamaño de la muestra.

Esta constante nos sirve para determinar cada cuántos elementos o cada cuánto tiempo se debe elegir el siguiente; para ello hay que elegir al azar un número entre 1 y Cs; de ahí en adelante tomar uno de cada K a intervalos regulares. Es conveniente tener en cuenta la periodicidad del fenómeno.

> Ejemplo 2: Para obtener una muestra de suscriptores telefónicos en una ciudad grande, puede obtenerse primero una muestra aleatoria de los números de las páginas del directorio telefónico; al elegir el vigésimo nombre de cada página obtendríamos un muestreo sistemático, también podemos escoger un nombre de la primera página del directorio y después seleccionar cada nombre del lugar número cien a partir del ya seleccionado. En este caso, podríamos seleccionar un número al azar entre los primeros 100; suponiendo que el elegido es el 40, entonces seleccionamos los nombres del directorio que corresponden a los números 40, 140, 240, 340 y así sucesivamente.

El muestreo **sistemático** suele ser más preciso que el aleatorio simple, ya que recorre la población de un modo más uniforme.

En el tipo de muestreo **Estratificado** se involucra la división previa de la población en subgrupos, clases o estratos que se suponen mas homogéneos, y a los cuales se le asigna una cuota que determina el número de miembros del estrato que compondrán la muestra, estos son escogidos mediante muestreo aleatorio simple. Según la cantidad de elementos de la muestra que se han de elegir de cada uno de los estratos, existen dos técnicas de muestreo estratificado:

Asignación proporcional: el tamaño de cada estrato en la muestra es proporcional a su tamaño en la población.

Asignación óptima: la muestra recogerá más individuos de aquellos estratos que tengan más variabilidad. Para ello es necesario un conocimiento previo de la población.

Ejemplo 3: Suponiendo un estudio sobre la población de estudiantes de cierto plantel del COBACH, en el que a través de una muestra de 10 de ellos queremos obtener información sobre el uso del lápiz labial. Pero reflexionando sobre que el comportamiento de la población con respecto a esta característica no es homogéneo, podemos dividir a la población en dos estratos:

- Estudiantes masculinos 40%.
- Estudiantes femeninos 60%.

De modo que la asignación proporcional a esta muestra es en función de sus respectivos tamaños (6 varones y 4 mujeres).

También se puede observar que el comportamiento de los varones con respecto a la característica en estudio es muy homogéneo y diferenciado del grupo de las mujeres que es muy variable. De modo que la *asignación óptima* de una muestra de 10 alumnos, nos indica que es más conveniente elegir más individuos en los grupos de mayor variabilidad.

De la cual obtendríamos mejores resultados estudiando una muestra de

- 1 varón.
- 9 mujeres.

Se le llama muestreo **Por conglomerados** al dividir primero la población en grupos o conglomerados convenientes para el muestreo, seleccionando de cada uno de ellos una porción, al azar o por un método sistemático. Bajo este método, aunque no todos los grupos son muestreados, cada grupo tiene una igual probabilidad de ser seleccionado.

Por lo tanto, la muestra es aleatoria. Una muestra por conglomerados, usualmente produce un mayor error muestral que una muestra aleatoria simple del mismo tamaño; sin embargo, puede ser obtenida dentro de un corto período de tiempo y a bajo costo. Además una muestra por conglomerados ofrece la misma precisión en la estimación que una muestra aleatoria simple, si la variación de los elementos individuales dentro de cada conglomerado es proporcionalmente tan grande como la de la población.

TAREA 1

Nombre ____

Núm. de lista ____________ Grupo __________________ Turno ___________

Núm. de Expediente _____________________ Fecha _____________________

INSTRUCCIONES: Consulta la página www.consulta.com.mx, elige un estudio realizado y determina cuales son los distintos conceptos estadísticos que aparecen, tales como:

a) Población.
b) Muestra elegida.
c) Muestreo aplicado.
d) Variables involucradas

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 2

Nombre ____

Núm. de lista ___________ Grupo ________________ Turno __________

Núm. de Expediente ___________________ Fecha ___________________

INSTRUCCIONES: Investiga tres conceptos diferentes de Estadística y anótalas.

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 3

Nombre ____

Núm. de lista ____________ Grupo __________________ Turno ___________

Núm. de Expediente _____________________ Fecha _____________________

INSTRUCCIONES: Elabora dos ejemplos en donde se desglose la Estadística descriptiva y la Estadística inferencial.

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

AUTOEVALUACIÓN

Nombre ____

Núm. de lista ____________ Grupo ________________ Turno __________

Núm. de Expediente ___________________ Fecha ____________________

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente y responde los siguientes cuestionamientos, rellenando el círculo de la opción que consideres correcta.

1. Rama de las matemáticas en donde a través de un conjunto de metodologías se puede observar el comportamiento de un experimento o fenómeno y da una conclusión acertada.

Ⓐ Estadística
Ⓑ Estadística diferencial
Ⓒ Estadística inferencial
Ⓓ Estadística aplicada

2. ¿Cuáles son las dos clasificaciones de la estadística?

Ⓐ Inferencial y aplicada
Ⓑ Aplicada diferencial
Ⓒ Descriptiva e inferencial
Ⓓ Descriptiva y diferencial.

3. Conjunto de datos cuya finalidad es suministrar información acerca de una población en donde todos los elementos deben tener todas las características de la población.

Ⓐ Población
Ⓑ Muestra
Ⓒ Estadística
Ⓓ Datos

4. Tipo de variable al que se le puede asignar un valor numérico:

Ⓐ Numéricas o cuantitativas
Ⓑ Categóricas o cualitativas
Ⓒ Numérica continua
Ⓓ Cabalística

5. Así se le llama al estudio que se hace de una población por medios de muestras representativas que posea todas las características de una población:

Ⓐ Muestra
Ⓑ Muestreo
Ⓒ Experimento
Ⓓ Organizar

EJERCICIO DE REFORZAMIENTO 1

Nombre ____

Núm. de lista ___________ Grupo _______________ Turno _________

Núm. de Expediente __________________ Fecha ___________________

INSTRUCCIONES: Realiza los siguientes ejercicios.

1. Recorta de un periódico una nota o noticia informativa donde se involucre a la estadística, pégala en tu cuaderno, analízala y determina:

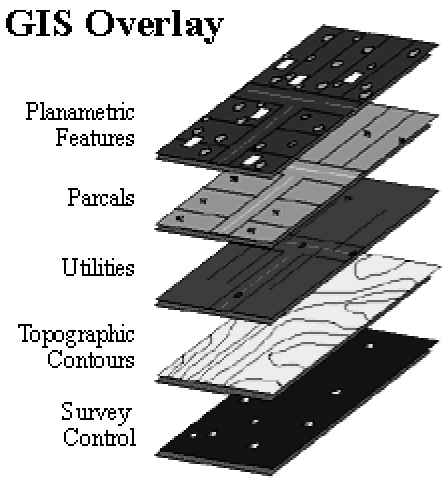
    a) La población de estudio.
    b) La muestra elegida.
    c) Las variables involucradas.

2. Propón por escrito, al menos dos maneras diferentes de cómo podrías elegir al azar una muestra de cinco compañeros de tu grupo.

3. A continuación se te proporciona una serie de variables estadísticas, clasifica cada una como nominal, ordinal, discreta o continua según corresponda.

    a) Peso.
    b) Promedio escolar.
    c) Estado civil.
    d) Semestre que cursa.
    e) Mes de nacimiento.
    f) Número de hermanos por alumno.
    g) Deporte favorito.
    h) Tiempo invertido al día en el chat.

4. Realiza en equipo (máximo cinco alumnos) un estudio y análisis de una investigación médica, industrial, el comercio, etc. Apoyada con estadísticas y determina que conceptos de la estadística se involucran e identifican.



Unidad 2

Representación Tabular y Gráfica

Objetivos:

El alumno:

Construirá representaciones tabulares y gráficas, tras decidir el tipo de datos al que pertenecen los obtenidos en algún experimento, dándole el manejo adecuado, mediante los procesos para datos no agrupados y agrupados, destacando de éstos los aspectos más relevantes con el fin de conocer y facilitar la descripción estadística del fenómeno, mostrando una actitud crítica, propositiva y de respeto dentro del aula.

Organizador anticipado:

Una presentación de un informe ordenado con las observaciones de un fenómeno, nos puede proporcionar comprensibilidad y mayor significancia en el manejo y estudio de las mismas, sobre todo puede lograrse una mayor síntesis si las ordenamos conforme a una tabla o distribución de frecuencias; sin embargo, y aunque la distribución de frecuencias es quizás el recurso mayormente utilizado al momento de realizar el estudio de algún fenómeno, es también deseable que pudiéramos utilizar este recurso para observar y describir el fenómeno con valores más resumidos de la información, sobre todo si atendemos a la característica natural de la distribución de datos a concentrarse hacia el centro, permitiéndonos también estudiar y describir la variabilidad o dispersión de la distribución de los datos.

Temario:

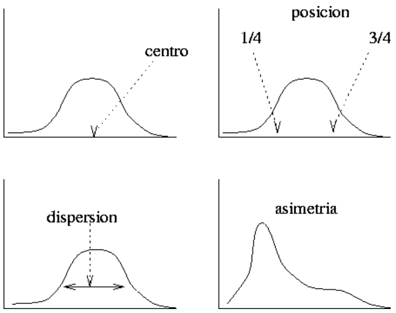
- *Distribución de Frecuencias.*
  - *Frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada.*
  - *Construcción de distribución o tabla de frecuencias para datos no agrupados y agrupados.*
- *Representación Gráfica.*
  - *Histograma*
  - *Polígono de frecuencias*
  - *Ojiva*
  - *De barras*
  - *Circular*

Evaluación Diagnóstica:

Antes de iniciar esta Unidad se recomienda revisar los temas de la siguiente lista y resolver algunos ejercicios y presentarlos al profesor para que su revisión y retroalimentación por las observaciones y sugerencias que te haga del mismo.

- Leyes de los signos para la suma
- Leyes de los signos para el producto
- Manejo de tablas
- Operaciones entre números reales
- Manejo de la calculadora

2.1. DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS



En los gráficos podemos observar la característica natural de la distribución de da tos a concentrarse hacia el centro y la variabilidad de los datos en los extremos.

Concepto:

La Distribución o Tabla de Frecuencias: Es la representación conjunta de los datos en forma de tabla o subgrupo de datos correspondientes a un fenómeno en estudio y su ordenamiento en base al número de observaciones que corresponden a cada dato o a cada grupo de datos, adecuados según cronología, geografía, análisis cuantitativo o cualitativo.

Los principales elementos de una tabla estadística son: Título, unidades, encabezado, cuerpo o contenido, nota de pie y referencias.

Se elabora colocando en la primera columna los datos diferentes o subgrupos de datos (llamados clases o intervalos de clase) y en la columna siguiente el número de observaciones que corresponden a cada dato o a cada grupo de datos (llamada frecuencia).

Una tabla de este tipo dará, en forma abreviada, una información completa acerca de la distribución de los valores observados.

Estas tablas facilitan el uso de los métodos gráficos y aritméticos.

La presentación de los datos en forma ordenada, por medio de una tabla, dependerá de los datos de que se trate, y si estos son cualitativos o cuantitativos como se muestra a continuación:

<table>
<tr><th>Datos</th><th>Ordenamiento</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Cualitativos</td><td>Alfabético A – Z</td></tr>
<tr><td>Alfabético Z – A</td></tr>
<tr><td>Del más al menos repetido</td></tr>
<tr><td>Del menos al más repetido</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cuantitativos</td><td>Creciente (menor al mayor)</td></tr>
<tr><td>Decreciente (mayor al menor)</td></tr>
</table>

Tabla 2.1.1.

EJEMPLO 2.1.1. Se preguntó a un grupo de alumnos de primer año del Cobach Plantel Huatabampo, por la asignatura de su preferencia, arrojándose los siguientes resultados:

Distribución de frecuencias

Asignaturas

Mate	Social	Taller	Quím.	Infor	Mate	Inglés
Mate	Quím.	Infor	Inglés	Ética	Inglés	Social
Inglés	Ética	Mate	Taller	Quím.	Mate	Taller
Social	Mate	Inglés	Infor	Inglés	Ética	Infor
Mate	Inglés	Infor	Ética	Quím.	Taller	Inglés
Social	Inglés	Ética	Taller	Infor	Quím.	Taller
Taller	Infor	Mate	Quím.	Infor	Mate	Infor
Inglés						

Asignatura	Repeticiones (frecuencias)
Ética y valores	5
Informática	9
Inglés	10
Matemáticas	9
Química	6
Sociales	4
Taller de lectura	7
Total	50

EJEMPLO 2.1.2: Cierta universidad realizó un experimento sobre el coeficiente intelectual (C.I.) de sus alumnos, para lo cual aplicó un examen de C.I. a un grupo de 20 alumnos escogidos al azar, obteniendo los siguientes resultados:

119, 109, 124, 119, 106, 112, 112, 112, 112, 109, 112, 124, 109, 109, 109, 106, 124, 112, 112,106.

Toda vez que se tienen los datos, se ordenan de menor a mayor o viceversa.

106, 106, 106, 109, 109, 109, 109, 109, 112, 112, 112, 112, 112, 112, 112, 119, 119, 124, 124, 124

Datos	Repeticiones
106	3
109	5
112	7
119	2
124	3

2.1.1. Frecuencia absoluta, absoluta acumulada, relativa y relativa acumulada.

Frecuencia Absoluta de un dato: Es el número de veces que se repite ese dato, también se presenta la frecuencia absoluta de un intervalo que se refiere al número de datos que pertenecen a ese intervalo.

La denotaremos por f .

Frecuencia Absoluta Acumulada: Hasta un dato específico, es la suma de las frecuencias absolutas de todos los datos anteriores, incluyendo también la del dato mismo del cual se desea su frecuencia acumulada. De un intervalo es la suma de las frecuencias absolutas de todos los intervalos de clase anteriores, incluyendo la frecuencia del intervalo mismo del cual se desea su ***Frecuencia acumulada***. La última frecuencia absoluta acumulada deberá ser igual al número total de datos.

La denotaremos por f_a

Frecuencia Relativa: De un dato, se obtiene al dividir la frecuencia absoluta de cada dato entre el número total de datos. De un intervalo se obtiene al dividir la frecuencia absoluta de cada intervalo entre el número total de datos.

La denotamos por f_r

Frecuencia Relativa Acumulada: Hasta un dato específico de la observación, es la suma de las frecuencias relativas de todos los datos anteriores, incluyendo también la del dato mismo del cual se desea su frecuencia relativa acumulada de un intervalo es la suma de las frecuencias relativas de todos los intervalos de clase anteriores incluyendo la frecuencia del intervalo mismo del cual se desea su frecuencia relativa acumulada. La última frecuencia relativa acumulada deberá ser igual a la unidad.

La denotaremos por f_{ra}

TAREA 1

Página 47.

2.1.2 Construcción de distribución o tabla de frecuencias para datos no agrupados y agrupados.

Datos no agrupados

Datos diferentes: Consideraremos como un dato diferente, a cada uno de los distintos datos que se presentan en la muestra, los denotaremos por x_i, y al número total de datos diferentes lo denotaremos por m.

Datos no Agrupados: Cuando el tamaño de la muestra (n) es finito y el número de datos diferentes es pequeño (consideraremos pequeño k $\leq$ 10), es fácil hacer un análisis de los datos tomando cada uno de los datos diferentes y ordenándolos tomando en consideración la tabla 2.1.1.

EJEMPLO 2.1.3: Utilicemos los datos de los ejemplos 2.1.1. y 2.1.2.

Asignatura de Preferencia				
x_i	f	f_a	f_r	f_{ra}
Ética y valores	5	5	0.1	0.1
Informática	9	14	0.18	0.28
Inglés	10	24	0.2	0.48
Matemáticas	9	33	0.18	0.66
Química	6	39	.12	0.78
Sociales	4	43	0.08	0.86
Taller de lectura	7	50	0.14	1.00
Total	50		1.00	

Coeficiente Intelectual				
x_i	f	f_a	f_r	f_{ra}
106	3	3	0.15	0.15
109	5	8	0.25	0.40
112	7	15	0.35	0.75
119	2	17	0.10	0.85
124	3	20	0.15	1.00
Total	20		1.00	

Ahora resulta un poco inoperante el realizar cálculos repetitivos, sobre todo cuando se trata de una infinidad de datos o cuando el tamaño de la muestra es considerablemente grande, por lo que se utiliza el agrupar los datos en subgrupos llamados intervalos o clases.

Datos agrupados

Cuando el tamaño de la muestra es considerable o grande y los datos numéricos son muy diversos (n>15), conviene agrupar los datos de tal manera que permita establecer patrones, tendencias o regularidades de los valores observados. De esta manera podemos condensar y ordenar los datos tabulando las frecuencias asociadas a ciertos intervalos de los valores observados.

Intervalos de Clase: Son los intervalos en los que se agrupan y ordenan los valores observados. Cada uno de estos intervalos está delimitado (acotado) por dos valores extremos que les llamamos límites.

Pasos a seguir para construir intervalos de frecuencia.

1. ***Determinar la cantidad de intervalos apropiada.***

La selección del número adecuado de intervalos y los límites entre ellos dependen del criterio o experiencia de quien realiza el estudio. Sin embargo, existen reglas empíricas para calcular el número de intervalos; la más empleada es la **Regla de Sturges**, cuya expresión es:

$$K = 1 + 3.3\ Log\ n$$

Donde: K=Número de intervalos el cual siempre debe ser un número entero. Razón por la cual se deberá redondear el resultado al entero más cercano.

n = Número de datos.

Log = logaritmo en base 10.

Otra regla utilizada es la de ***Velleman*** que establece que el número de Intervalos se obtiene de la raíz cuadrada del número de datos; es decir K= $\sqrt{n}$, recomendable para tamaños de muestra pequeños (n< 50)

El número de ***intervalos*** determinado mediante cualquier regla se aproxima al valor entero más cercano pero deberá ser responsabilidad de quien realiza el estudio, pudiendo utilizar éste en ocasiones uno menor o mayor al obtenido por cualquier regla, si esto le permite tener intervalos con la misma amplitud. Sin embargo, la mayoría de las reglas subestiman el número de intervalos.

2.- ***Calcular el rango de los datos***.

Llamamos rango al número de unidades de variación presente en los datos recopilados y se obtiene de la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. Se representa con la letra **R.**

R= Dato mayor menos dato menor

3.- ***Obtención de la amplitud o anchura que tendrá cada intervalo.***
Se encuentra dividiendo el rango por el número de intervalos regularmente es de 5 a 6. Se representa con la letra *A* de tal manera que $Ac = \frac{R}{K}$.

4.- ***Construcción de los intervalos***.
Los intervalos de clase son conjuntos numéricos y deben ser excluyentes y exhaustivos; es decir, si un dato pertenece a un intervalo determinado, ya no podrá pertenecer a otro, esto quiere decir excluyentes y además todos y cada uno de los datos deberá estar contenido en alguno de los intervalos, esto les da el valor de exhaustivos.

Las dos caracteres mencionadas anteriormente se logran construyendo intervalos cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha; esto se simboliza a través del uso de corchetes y paréntesis respectivamente. Por razones naturales, el último intervalo será cerrado por ambos extremos.

El primer intervalo se construye de la siguiente manera: Habrá de iniciar con el dato menor, el cual será el extremo inferior del intervalo; el otro extremo se obtiene de la suma del dato menor y la amplitud, con este mismo valor iniciamos el segundo intervalo, del cual el segundo extremo se encuentra sumando al valor anterior la amplitud y este proceso se repite sistemáticamente hasta completar el total de intervalos indicado por la regla elegida, por ejemplo la de Sturges.

Los valores extremos o límites de intervalo.
Los intervalos de clase deben estar definidos por límites que permitan identificar plenamente si un dato pertenece a uno u otro intervalo. Estos límites son los valores extremos de cada intervalo.

Límite inferior: Es el valor menor de cada intervalo, se denota por L_i
Límite superior: Es el número mayor de cada intervalo, se denota por L_s.

También será muy útil conocer y calcular la ***Marca de Clase*** (MC) de cada intervalo: Se refiere al Punto Medio del intervalo y a través de él representaremos a todo el intervalo y una de las maneras de calcularla es promediando los valores límite de cada intervalo, su fórmula es:

$$MC = \frac{L_i + L_s}{2}$$

EJEMPLO 2.1.4: Un grupo de investigadores pertenecientes a la secretaría de seguridad pública, tomó una muestra aleatoria de las velocidades (km/h) registradas por 30 vehículos en el trayecto Hermosillo a Ures, con el fin de establecer nuevos límites máximos de velocidad para una carretera. La muestra arrojo los datos siguientes:

90, 99, 104, 99, 119, 98, 95, 112, 95, 120, 100, 90, 116, 96, 114, 108, 98, 118, 100, 106, 114, 100, 112, 106, 100, 115, 111, 105, 114, 97

Toda vez que se tienen los datos, se recomienda ordenarlos de menor a mayor o viceversa

90, 90, 95, 95, 96, 97, 98, 98, 99, 99, 100, 100, 100, 104,
105,106, 108, 111, 112, 112, 114, 114, 115, 116, 118, 119, 120

Ahora llevamos a la práctica los pasos descritos anteriormente para la construcción de los intervalos.

1º obtendremos el número de intervalos que vamos a utilizar, para lo cual empleamos la Regla de Sturges:

$$K = 1 + 3.3\text{Log } (30) = 1 + 3.3\ (1.4771212547) = 1 + 4.87 = 5.87 \approx 6$$

2º calculamos el rango de variación, $R = 120 - 90 = 30$

3º obtenemos la amplitud de cada intervalo de clase como sigue:

$$Ac = \frac{30}{6} = 5$$

4º construimos los intervalos, el primero de ellos inicia con 90 que es el extremo inferior que, sumado a 5 obtenemos 95, que será el extremo superior; este extremo será el inferior del segundo intervalo; y al sumar nuevamente la amplitud tendremos 100 que será el extremo superior y así sucesivamente hasta completar los 6 intervalos., que se muestran enseguida:

[90 – 95), [95 – 100), [100 – 105), [105 – 110), [110 – 115) y [115 – 120]

Los corchetes expresan que el valor extremo se incluye en el intervalo y ***los paréntesis*** dan a entender que el valor extremo del intervalo no se incluye en el.

Para la construcción de distribuciones de frecuencias, contamos el número de datos que le corresponden a cada intervalo; es decir obtenemos las frecuencias absolutas y de estas podemos generar los demás tipos de frecuencias y presentarlas en una tabla de resumen como la que a continuación se muestra:

Distribuciones de frecuencias para las velocidades

x_i Intervalos de Clase	f	f_a	f_r	f_{ra}	m_c
[90 – 95)	2	2	0.07	0.07	92.5
[95 – 100)	8	10	0.27	0.34	97.5
[100 – 105)	5	15	0.17	0.51	102.5
[105 – 110)	4	19	0.13	0.64	107.5
[110 – 115)	6	25	0.20	0.84	112.5
[115 – 120]	5	30	0.16	1.00	117.5
Total	30		1.00		

TAREA 2

Página 49.

2.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En este curso se abordarán los gráficos como un vehículo de presentación y herramienta en la estadística, que permite conocer los resultados de un hecho observable de todas las tendencias presentes con los datos obtenidos y hacer el análisis del estudio y tomar decisiones.

Toda vez que se ha hecho el análisis de frecuencias, existe en estadística, un conjunto de imágenes gráficas, las cuales combinando distintos tipos de colores, sombreados, puntos, líneas, símbolos, números o texto, etcétera, y un sistema de referencia (coordenadas), nos permite la representación en forma más resumida y total del experimento o fenómeno en estudio.

Los gráficos son muy útiles como apoyos e incluso sustitutos de las tablas o distribuciones y como una herramienta para el análisis de los datos, lo que los convierte en el medio más efectivo para la presentación, descripción, resumen y análisis de la información

Una manera sencilla de diferenciar los segmentos es sombreándolos de claro a oscuro, siendo el de mayor tamaño el más claro y el de menor tamaño el más oscuro.

Presentación de Datos: Después de la Organización de los datos y su presentación en Tablas Estadísticas, la información contenida en una tabla estadística también se puede presentar mediante graficas, siendo las más comunes para variables discretas (datos no agrupados) las de: Barras y circulares o de pastel; y para variables continuas (datos agrupados) el histograma, polígono de frecuencias y ojiva. Estos gráficos no son los únicos para la presentación y análisis de datos estadísticos, pero si los más comunes y utilizados.

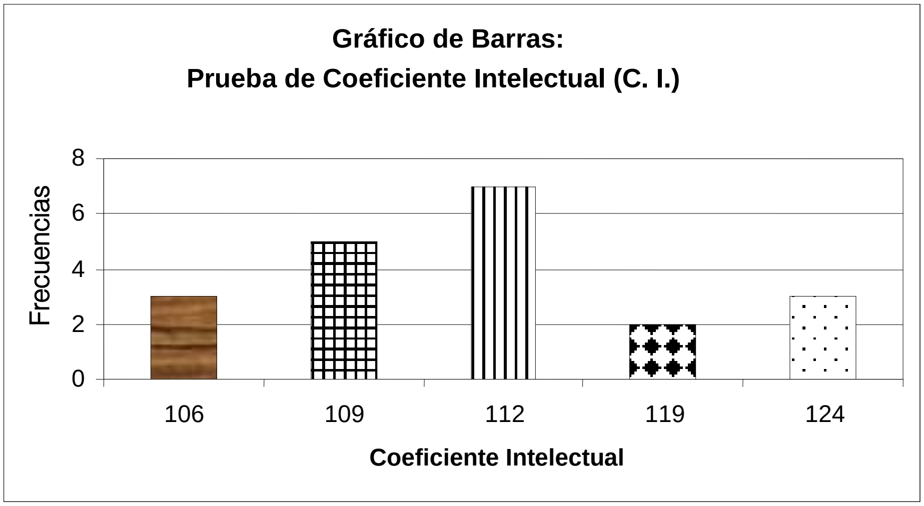
- El empleo de sombreado o colores facilita la diferenciación de las barras.
- El punto cero se indica en el eje de ordenadas.
- En la rotulación de los ejes se utiliza tipografía legible.

- La leyenda se ubica dentro de los límites de la gráfica.
- La longitud de los ejes debe ser suficiente para acomodar la extensión de la barra.
- El pie de figura explica las bandas de error y los tamaños de las muestras.

Gráfica de Barras:

Es un método gráfico que consta de dos ejes: Uno horizontal, en el que se representan los valores (Eje de los datos) utilizando barras verticales en forma rectangular y de la misma amplitud, y un eje vertical, en el cual la frecuencia representa la altitud que tendrá la barra rectangular (Eje de las frecuencias), las barras van separadas la misma distancia unas de otras y para distinguirlas puede utilizarse distintos colores o entramados según se considere.

Ejemplo: Utilizando los datos del ejemplo 2.1.4.

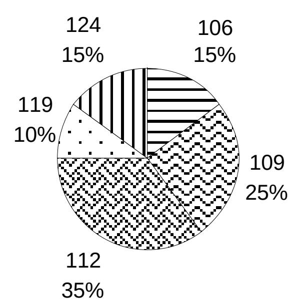


Gráfica Circular de Pastel o también llamada del 100%:

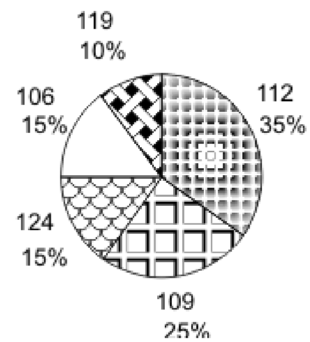
Este gráfico se utiliza fundamentalmente, para representar distribuciones de frecuencias relativas (es decir, porcentajes % o proporciones) haciendo corresponder la medida de la frecuencia relativa con la medida del ángulo en grados; es decir, si el 100 % de los datos son 360º de la circunferencia, a cada 1% le corresponderán 3.6º; así, para obtener la medida del ángulo del sector, multiplicamos la frecuencia correspondiente por 3.6º. Al utilizar este gráfico se aconseja no sobrepasar los 10 elementos, y ordenar los sectores de acuerdo a una de dos formas, ya sea siguiendo el orden que se les dé a los datos o empezando del mayor al menor segmento, iniciando a partir de las 12 horas y en el sentido de las manecillas del reloj. Por último, si el texto que representa cada sector no puede colocarse dentro del mismo, se elabora una leyenda que se coloca fuera del segmento, unidos por una flecha.

Ejemplo: Utilizando los datos del ejemplo 2.1.1.

Gráfica Circular:
Prueba de Coeficiente Intelectual



Gráfica Circular:
Prueba de Coeficiente Intelectual



TAREA 3

Página 51.

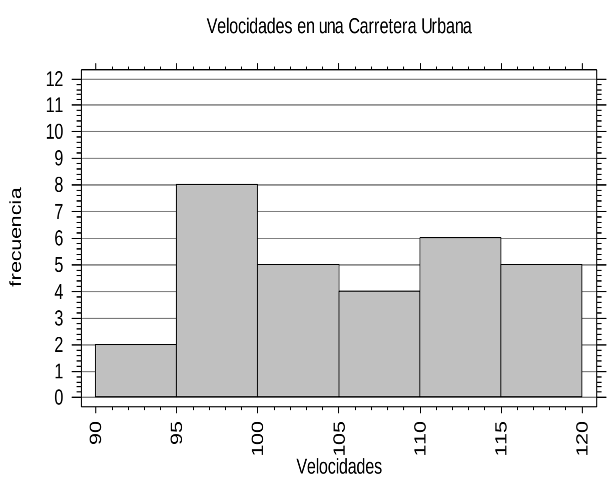
Gráfico de menor a mayor dato   Gráfico circular de mayor a menor porcentaje

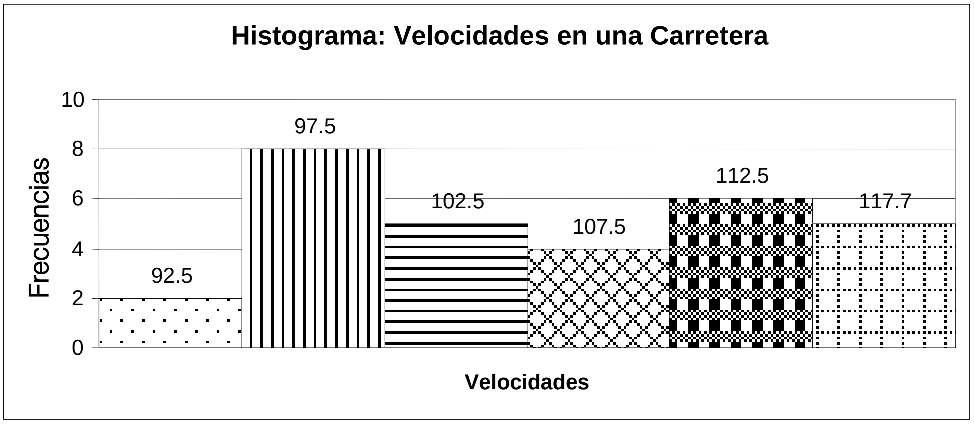
Histograma:

Es una grafica en forma de barras que consta de dos ejes, uno horizontal, llamado eje de la variable en observación, en donde situamos la base de una serie de rectángulos o barras contiguas; es decir, que no van separadas, y que se rotula con los límites inferiores de cada clase o intervalo excepto el último que deberá llevar también el límite superior, centradas en la marca de clase. Y un eje vertical llamado eje de las frecuencias, en donde se miden las alturas que vienen dadas por la frecuencia del intervalo que representa. Todos los intervalos deben tener la misma longitud.

Veámoslo a través de un ejemplo, cuando las amplitudes de los intervalos son iguales:

Ejemplo: Considerando los datos del ejemplo 2.1.4.





En la dirección de página sugerida se muestra un *applet* diseñado para enseñar cómo las amplitudes de intervalos (o el número de intervalos) afectan a un histograma http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/Histogram.html

Realiza las tareas #2 y #3.

TAREAS 2 y 3

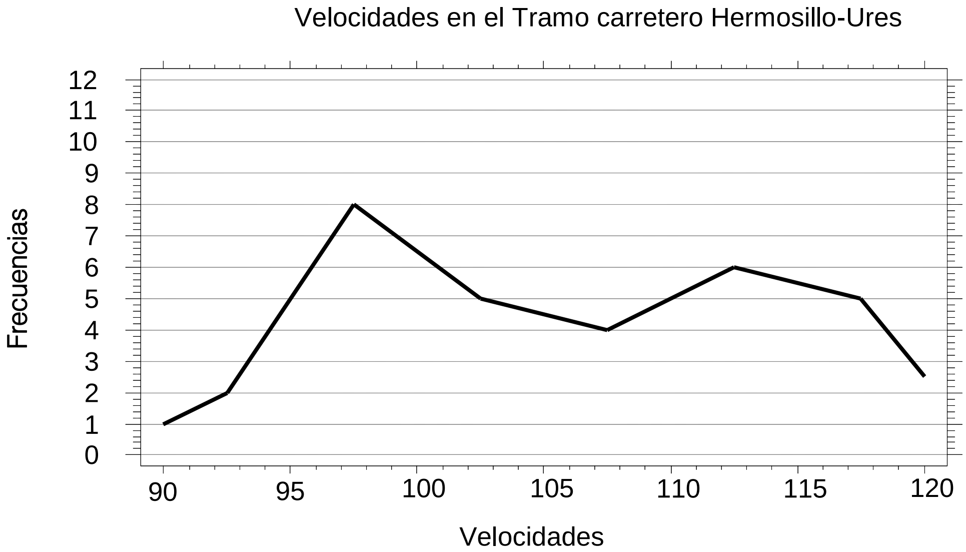
Páginas 53 y 55.

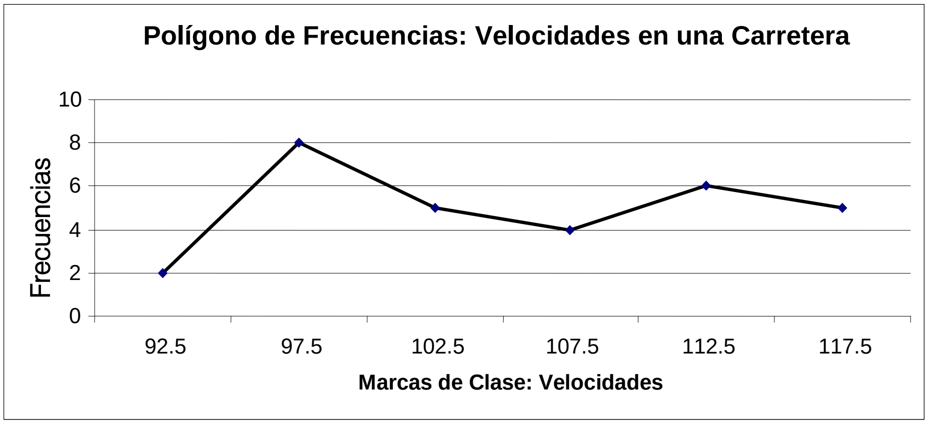
Polígono de Frecuencias:

es una gráfica del tipo de las gráficas de líneas trazadas sobre las marcas de clase, (de ahí el nombre de polígono), y se traza uniendo con segmentos de recta, de izquierda a derecha, las parejas ordenadas que se forman, al considerar como abscisa la marca de clase (eje horizontal) y como ordenada la frecuencia del intervalo representado (eje vertical); la primera y última parejas ordenadas se unen mediante un segmento de recta al eje horizontal, con las que serían la marca de clase anterior y posterior respectivamente si estas existieran.

Este tipo de gráfico adquiere mayor importancia cuando se quiere mostrar en un mismo gráfico más de una distribución o una clasificación cruzada de una variable continua con una discreta, situación que no se puede observar en uno de los gráficos presentados anteriormente por la forma de construcción del mismo gráfico.

Ejemplo: Considerando los datos del ejemplo 2.1.4.



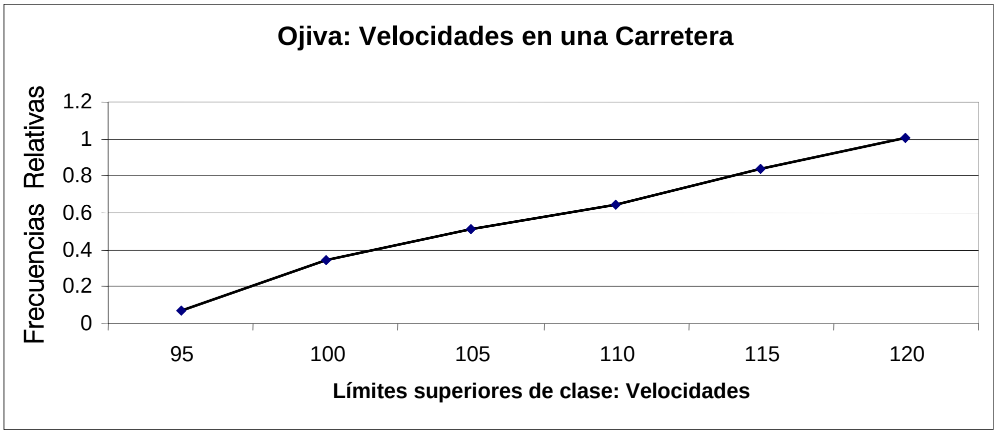


Gráfica de Frecuencias Acumuladas u Ojiva:

Es un gráfico que igual al histograma y polígono de frecuencias se utiliza para el análisis y representación de variables continuas, sólo que en vez de utilizar las frecuencias absolutas, por sus características se construye uniendo con segmentos de recta, de izquierda a derecha, las parejas ordenadas que se forman, al considerar como abscisa los límites superiores de cada intervalo (eje horizontal) y como ordenada las frecuencias relativas acumuladas hasta cada intervalo representado (eje vertical). Existen dos tipos de ojivas, las llamadas de mayor que, iniciando en la frecuencia más alta 1 hacia la más baja 0 y las llamadas de menor que, iniciando en la frecuencia más baja 0 hacia la más alta 1.

El gráfico ojiva representa mayor importancia cuando se trata de comparar las observaciones de una misma característica en dos experimentos distintos, ya que no se puede ejecutar comparaciones sobre frecuencias absolutas, es necesario una comparación sobre frecuencias relativa; además permite ver cuántas observaciones se hallan por arriba o debajo de ciertos valores establecidos.

Ejemplo: Considerando los datos del ejemplo 2.1.4.



TAREA 4

Página 57.

TAREA 1

Nombre ____

Núm. de lista ___________ Grupo ________________ Turno __________

Núm. de Expediente ___________________ Fecha ___________________

INSTRUCCIONES: Pregunta a 30 compañeros tuyos qué carrera piensan estudiar, con los datos obtenidos calcula la:

- Frecuencia Absoluta.
- Frecuencia Absoluta Acumulada.
- Frecuencia Relativa.
- Frecuencia Relativa Acumulada.
- Marca de Clase

x_i Intervalos de Clase	f	f_a	f_r	f_{ra}	m_c

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 2

Nombre ____

Núm. de lista __________ Grupo ______________ Turno __________

Núm. de Expediente ________________ Fecha ________________

INSTRUCCIONES: Recopila las estaturas (en metros) de todos los compañeros de tu grupo y reúne estos datos en una tabla que contenga

x_i Intervalos de Clase	f	f_a	f_r	f_{ra}	m_c

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 3

Nombre ____

Núm. de lista ____________ Grupo __________________ Turno ___________

Núm. de Expediente _____________________ Fecha _____________________

INSTRUCCIONES: Aplica una encuesta con los 40 estudiantes del COBACH con respecto al medio de transporte utilizado con mayor frecuencia para trasladarse a la escuela.

Con los datos obtenidos elabora una distribución de frecuencias absolutas y contenga el gráfico circular, así como el gráfico de barras para esta distribución.

x_i Intervalos de Clase	f	f_a	f_r	f_{ra}	m_c

Revisión: ____

Observaciones:____

____

____

____

TAREA 4

Nombre ____

Núm. de lista __________ Grupo _______________ Turno __________

Núm. de Expediente __________________ Fecha __________________

INSTRUCCIONES: *Con los datos de la tarea 2, construye los cuatro diferentes tipos de histogramas de frecuencias.*

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

AUTOEVALUACIÓN

Nombre ____

Núm. de lista __________ Grupo ______________ Turno _________

Núm. de Expediente _________________ Fecha __________________

INSTRUCCIONES: *Lee cuidadosamente y responde los siguientes cuestionamientos, rellenando el círculo de la opción que consideres correcta.*

1. Son los principales elementos de una tabla estadística:

Ⓐ Título, unidades, encabezados, cuerpo, nota de pie y referencias
Ⓑ Título, unidades, encabezados, nota de pie y referencias
Ⓒ Unidades, encabezados, cuerpo, nota de pie y referencias
Ⓓ Título, unidades, encabezados, cuerpo, nota de pie, valores y referencias

2. De un dato es el número de veces que se repite.

Ⓐ Frecuencia
Ⓑ Frecuencia absoluta
Ⓒ Frecuencia Relativa
Ⓓ Frecuencia absoluta acumulada

3. Cuando el tamaño de la muestra es finito y el número de datos diferentes es pequeño.

Ⓐ Datos diferentes
Ⓑ Datos no agrupados
Ⓒ Datos agrupados
Ⓓ Intervalos de clase

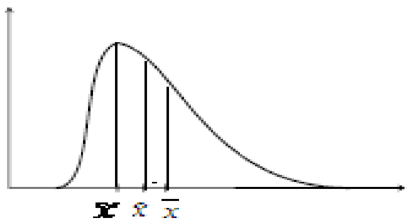
4. Se utiliza para representar distribuciones de frecuencias relativas:

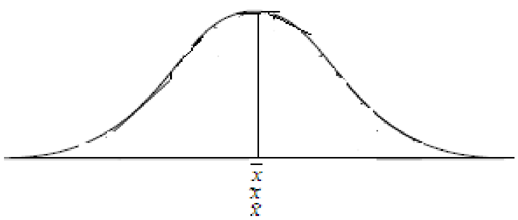
Ⓐ Gráfica circular
Ⓑ Gráfico de barras
Ⓒ Gráficas de frecuencias acumuladas u ojiva
Ⓓ Gráfica circular

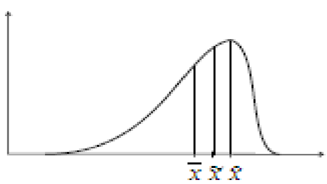
5. Se utiliza para el análisis y representación de variables continuas, y se construye uniendo con segmentos de recta, de izquierda a derecha.

Ⓐ Gráfica circular
Ⓑ Gráfico de barras
Ⓒ Gráficas de frecuencias acumuladas u ojiva
Ⓓ Gráfica circular

Unidad 3
Medidas de Centralización y Variabilidad.


Distribucion con sesgo a la derecha


Distribucion simetrica


Distribucion con sesgo a la izquierda

Objetivos:

El alumno:

Calculará medidas de centralización y variabilidad, tras conocer su comportamiento en datos agrupados y no agrupados, aplicando los procedimientos propuestos, mostrando una actitud crítica, propositiva y de respeto dentro del aula.

Temario:

- Medidas de tendencia central:
  Media
  Mediana
  Moda
- Medidas de Variabilidad
  Rango
  Varianza
  Desviación estándar

3.1. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

Las medidas de tendencia central, de centralización o posición facilitan la interpretación de información sobre un conjunto o serie de datos que se están analizando, una vez que estos datos fueron recopilados u organizados, ya sea en una investigación documental o en una investigación de campo.

Normalmente, la variable que se intenta medir es conocida en algunas ocasiones de manera insuficiente. Esto no significa que no se tenga algún conocimiento global de valores que pueda asumir, sino que es necesario conocerla mejor para tomar alguna decisión de importancia.

Por ejemplo, si se desea comparar las estaturas de alumnos varones de dos planteles del Colegio de Bachilleres del quinto semestre, y al tomar las medidas, se encontraran las variables entre 140 a 210 cm. Este conocimiento no es lo suficientemente preciso para hacer la comparación deseada, es indispensable afinarlo más para cada uno de los dos planteles, interesa donde están centradas las estaturas, que tanta variabilidad tiene, etc. De los muchos aspectos de los datos, que intentamos representar numéricamente con estadísticas, dos son los más importantes:

Medidas de Centralización

- a) Media Aritmética o promedio ($\bar{x}$)
- b) Mediana $(\tilde{x})$
- c) Moda $(\hat{x})$

Medidas de Variabilidad o Dispersión

- a) Rango (R)
- b) Desviación Media (D. M)
- c) Varianza (S^2)
- d) Desviación estándar o típica (S)

Para variables numéricas en las que puede haber un gran número de valores observados distintos, se ha de optar por un método de análisis distinto, respondiendo a la siguiente pregunta:

¿Alrededor de qué valor se agrupan los datos?

Las medidas de centralización vienen a responder esta pregunta.

3.1.1 Medidas de centralización para datos no agrupados

a) Media Aritmética. La medida más evidente que podemos calcular para describir un conjunto de observaciones numéricas es su valor medio. La media no es más que la suma de todos los valores de una variable dividida entre el número total de datos de los que se dispone. Siendo su fórmula la siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Donde:

$\sum$ Símbolo de sumatoria que indica que se deberá sumar lo que aparezca a derecha, es decir, x.

X Cada uno de los datos obtenidos de la muestra.

n Número total de datos.

Como ejemplo, consideremos 10 pacientes de edades 21 años, 32, 15, 59, 60, 61, 64, 60, 71, y 80. La media de edad de estas personas será de:

$$\bar{x} = \frac{21+32+15+59+60+61+64+60+71+80}{10}$$

$$\bar{x} = 52.3 años$$

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Ventajas

Es de fácil cálculo e interpretación sencilla. Es la más utilizada y es útil en muchos desarrollos matemáticos.

Desventajas

La principal desventaja se presenta cuando alguno o los dos valores extremos de la muestra son desproporcionados respecto al resto de los datos, sobre todo cuando éstos son poco numerosos. En este caso la media se aleja de la realidad; es decir, deja de ser representativa de los datos.

EJERCICIO 1

Instrucciones: En los siguientes ejercicios determina lo que se pide:

1. Hallar la media aritmética de los siguientes valores: 5, 7, 8, 10, 15.

2. Si las calificaciones de un alumno en las distintas asignaturas de un curso durante una evaluación fueron: 7; 5; 6,5; 3,7; 5, 6,2. ¿Qué promedio obtuvo el alumno?

3. La media de 6 elementos se sabe que es 10. Sabiendo que cinco de ellos son: 8, 12, 13, 5 y 9, hallar el elemento que falta

4 Un alumno obtiene en tres exámenes parciales las siguientes notas: 7, 5 y 3; en el examen final consigue un 6. Suponiendo que esta nota final tenga doble valor que las parciales, ¿cuál será su nota media?

b) Mediana

En esta medida, los datos u observaciones equidistantes o que se encuentran más en medio de todo el conjunto de datos.

La mediana del ejemplo anterior, sería el valor que deja a la mitad de los datos por encima de dicho valor, y a la otra mitad por debajo, es decir el 50 % por arriba y el 50% por debajo del conjunto de datos.

Para obtener la mediana para datos agrupados, primeramente deberemos ordenar los datos en forma ascendente o descendente observando la siguiente secuencia de datos: 5, 21, 32, 59, 60, 60,61, 64, 71, 80. (Datos ordenados)

Como quiera que sea, en este ejemplo, el número de datos u observaciones es par (10 personas), los dos valores que se encuentran en medio son 60 y 60. Si realizamos el cálculo para la media nos dará:

5, 21, 32, 59, 60,60 61, 64, 71, 80. (Número de observaciones par)

$$\bar{x} = \frac{60+60}{2} \qquad\qquad \bar{x} = \tilde{x} = 60 años$$

Si al ejemplo anterior le agregamos un paciente más de 55 años entonces la mediana se determinará como el dato u observación que se encuentra más en el medio es decir:

5, 21, 32, 55, 59, 60, 60,61, 64, 71, 80. Entonces la mediana $(\tilde{x})$ = 60 años

Si la media y la mediana son iguales, la distribución o conjunto de datos de la variable es simétrica. Sin embargo, la media es muy sensible a la variación de las puntuaciones, y la mediana es menos sensible a dichos cambios.

Geométricamente la mediana es el valor de la variable que corresponde a la vertical que divide al histograma en dos áreas iguales. Cuando determinados valores de un conjunto de datos u observaciones son muy grandes o muy pequeños con respecto a los demás, entonces la media aritmética se puede distorsionar y perder su carácter representativo, en esos casos, es conveniente utilizar la mediana como medida de tenencia central.

VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE LA MEDIANA

Ventajas

a) La Mediana no se ve afectada por los valores extremos, por lo que la podemos utilizar en aquellos casos en que la media aritmética no es útil.

Desventajas

a) La más importante, es que no podemos hacer cálculos adicionales con la mediana.

b) No utiliza mucha información de un conjunto de datos.

c) Finalmente, al menos que dispongamos de una computadora o unos esclavos, no es fácil ordenar un conjunto grande de números. En este caso, la mediana no es fácil de calcular.

EJERCICIO 2

Instrucciones:

1. Determinar la mediana para el siguiente conjunto de datos

a) 5, 6, 9, 11, 15, 19, 23, 26, 27.

b) 5, 7, 10, 15, 20, 21, 24, 27.

c) Las calderas de una planta de energía de vapor a alta presión tuvieron las siguientes eficiencias en porcentajes: 90.3, 91.6, 90.9, 90, 90.3, 91.0, 87.9, 89.4. ¿Cual es el significado de la mediana en este caso?

c) La moda $(\bar{x})$ se suele definir como el valor más frecuente. En el caso de una variable no agrupada, es el valor de la variable que más se repite.

Ejemplo 1: En el caso del ejemplo anterior, 5, 21, 32, 59, 60, 60, 61, 64, 71, 80. La moda será: $\bar{x} = 60$ años. (Unimodal)

Ejemplo 2: Determinar la moda del siguiente conjunto de datos 1, 2, 3, 4, 4, 5, 2, 1, 3, 4, 2, 3, 4, 6, 3

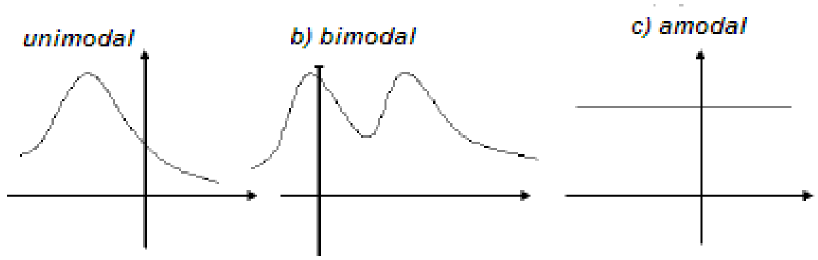
1, 1, 2, 2, 2, *3, 3, 3, 3,* 4, 4, 4, 4, 5, 6.

$\boxed{\bar{x} = 3y4}$ Bimodal

Ejemplo 3: Determinar la moda del siguiente conjunto de datos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

En este caso, como ningún dato se repite será amodal.

Gráficamente eso se puede reflejar mediante el análisis de un histograma de frecuencias



Grafica 1

En el caso de que la distribución o conjunto de datos tenga una moda, se dirá que el conjunto de datos es unimodal; si tiene dos modas, se llamara bimodal; más de dos modas, se le llamará polimodal; y en caso que no tenga ninguna moda se denominará amodal.

VENTAJAS

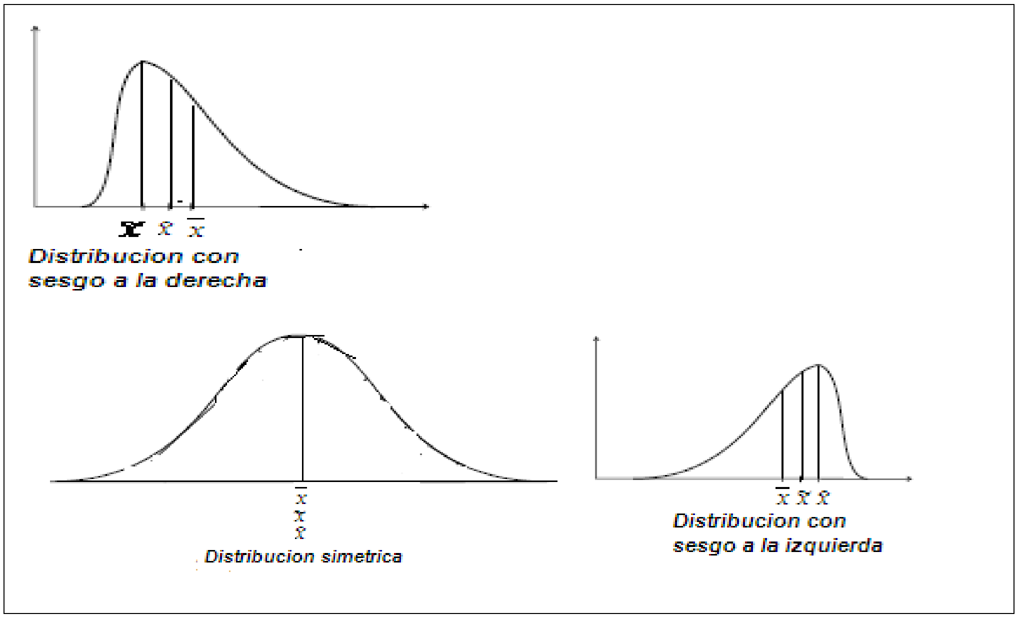
Es la que más fácilmente se determina, puesto que la obtenemos por inspección y no por cómputo.

Posiciones relativas de la Media, la Mediana y la Moda.

Si la Media, Mediana y Moda se localizan en el centro y son siempre iguales, la distribución es simétrica. Ello significa que si se doblara por la mitad al polígono de frecuencia, ambos lados tienen la misma forma. El punto más alto de la curva, corresponde a la moda. Como la curva es simétrica, la mediana corresponde al punto en que la distribución se parte a la mitad. Las frecuencias más altas se compensan con las más bajas; y así, la Media, Mediana y Moda coinciden, lo que significa que cualquiera de las tres medidas *es adecuada* para representar una distribución. Conforme la distribución se hace menos simétrica o sesgada, la relación entre los tres promedios cambia.

En una distribución positivamente sesgada, la Media aritmética es el mayor de los tres promedios. ¿Por qué? Porque la media es más influida, que la Moda o la Mediana, por valores extremadamente altos. La Mediana suele ser el siguiente promedio en una distribución de frecuencias positivamente sesgada; y la Moda el menor de los tres. Si la distribución es muy sesgada, no sería bueno emplear a la Media como promedio. La Mediana y la Moda serían más representativas.

Inversamente, en una distribución negativamente sesgada, la Media aritmética es el menor de los tres promedios. Es evidente que la Media se ve influida por unas cuantas observaciones extremadamente bajas. La Mediana es mayor que la Media Aritmética y la Moda es el mayor de los tres promedios. Aquí también si la distribución es muy sesgada, no se debe emplear la Media para representar a los datos.



Gráfica 2 Tipos de distribuciones

3.1.2 Medias de tendencia central para datos agrupados

Como recordarás, en la Unidad 2 se vieron los diferentes tipos de frecuencias con los que se puede ordenar la distribución o conjunto de datos:

Ejemplo: La siguiente distribución de datos representan las calificaciones de 30 alumnos

88	77	49	38	100
95	60	75	100	80
63	69	50	90	82
65	75	100	95	50
80	70	60	100	75
80	100	90	85	75

Para resumir la información del número de estudiantes que obtuvieron una determinada calificación, se hace por medio de una tabla con dos encabezados, lo cual permite exhibir, en forma concisa, el número de veces que se presenta una determinada cantidad en un conjunto de datos.

Los datos anteriores se pueden presentar por medio de una tabla de frecuencias como sigue:

Calificación	38	49	50	60	63	65	69	70	75	77	80	82	85	88	90	95	100
Número de Estudiantes	1	1	2	2	1	1	1	1	4	1	3	o	1	1	2	2	5

Tabla 1

Lo anterior, se puede elaborar, si el conjunto de datos o muestra es pequeña; pero en realidad esto se presenta en pocas ocasiones y por lo tanto, cuando los datos son demasiados, se presentarán como tablas de distribución de frecuencias.

Ejemplo. El siguiente conjunto de datos nos representan los pesos en kilogramos de 40 pacientes sometidos a una dieta.

49.0	50,5	53.5	56.0	60.0	67.0	68.6	71.0
49.8	50.6	54.0	57.0	60.0	67.5	69.0	71.5
49.8	50.6	54.3	57.5	63.5	68.0	69.5	72.0
50.0	51.0	55.0	58.3	64.0	68.4	69.6	72.5
50.3	52.0	55.0	59.0	64.0	68.6	70.0	73.0

Los datos se deberán ordenar en forma ascendente o descendente como se prefiera; en nuestro caso se ordenaron en forma ascendente.

Con la información del presente ejemplo, primero hay que decidir en cuantas clases deberá dividirse el intervalo y después su amplitud. De acuerdo a la experiencia, se recomienda entre 5 y 20 clases, resulta conveniente construirlas de modo que todas las clases tengan la misma anchura, la cual recibe el nombre de amplitud de Clase (A).

La selección del número adecuado de clases y los cortes entre ellas es un asunto de criterio y de experiencia. Sin embargo, aquí se dan unas reglas empíricas para calcular el número máximo de clases, (Hoaglin, *et. al.*, (1983) p. 22 y sigs.):

1ª Sturges (1926) que establece que el número de clases es:
$K = 1 + \log_2 n = 1 + 3.322 \log n$, la cual subestima el número de intervalos.

2ª Velleman (1976), $K = 2\sqrt{n}$ es recomendada cuando n es pequeño (n £ 50).

3ª Dixon y Kronmal (1965), $K = 10 \log n$, para n grande ($n > 50$).

No se puede establecer que una es superior a otra, sólo pueden utilizarse como un punto de referencia. Cabe aclarar que se considera solamente la parte entera que resulte del cálculo.

Los autores hemos observado se puede ver que para cualquier n, el número de intervalos o clases que funciona bastante bien es;

$$K = \sqrt{n}$$.

Para el caso del ejemplo anterior se aplicara primero la regla de Sturges:

$$K = 1 + 3.3\log(n)$$

Donde:

K= Nº de Clases en que se divide la distribución o Nº de Intervalos en que se divide la distribución.

Log_2 = Logaritmo base 2.

n= Número de datos de la distribución o conjunto de datos.

Al tomar el ejemplo de los pesos en kilogramos, donde n=40, el cálculo de Sutrges quedará:

$$K = 1 + 3.3\log(40) = 1 + 3.3(.6021) = 6.28 \approx 6$$

En caso de aplicar la regla empírica, tendremos: $K = \sqrt{n} = \sqrt{40} = 6.3 \approx 6$

Para determinar el valor de la amplitud(A) es decir el ancho de cada intervalo, lo calcularemos con la siguiente fórmula empírica:

$A = \frac{R}{K}$, donde:

R será el rango de la distribución; que se calculara con la siguiente fórmula:

$$R = DM - dm$$

R= Rango de la distribución
DM= dato mayor de la distribución o conjunto de datos
Dm= Dato menor de la distribución o conjunto de datos.

Para nuestro ejemplo tendremos:
DM= 73 ; dm=49 por lo tanto el rango será:

R=73 −49 =24

$\boxed{R=24}$

K= Número de clases o intervalos que llevará la distribución.
Por lo tanto, la amplitud para nuestro ejemplo será:

$$A = \frac{R}{K} = \frac{24}{6} = 4 \quad \Longrightarrow \quad A = 4$$

Con la Amplitud o ancho del intervalo y a partir del dato menor que es: 49 le sumaremos 4 unidades que representa la amplitud del intervalo y así sucesivamente hasta tener las seis clases que representa K.

Geométricamente la amplitud representa la base del rectángulo de cada barra del histograma; por tanto tendremos:

49+4=53; 49 y 53 representan los límites superior e inferior de la primera clase
53+4=57; 53 y 57 representan los límites superior e inferior de la segunda clase
57+4=61; 57 y 61 representan los límites superior e inferior de la tercera clase
61+4=65; 61 y 65 representan los límites superior e inferior de la cuarta clase
65+4=69; 65 y 69 representan los límites superior e inferior de la quinta clase
69+4=73; 69 y 73 representan los límites superior e inferior de la sexta clase

Al construir la tabla con los límites inferiores y superiores, tendremos los límites de clase de la distribución de la siguiente manera:

INTERVALOS DE CLASE
[49 , 53)
[53 , 57)
[57 , 61)
[61 , 65)
[65 , 69)
[69 , 73]

Tabla 2

[= Significa intervalo cerrado, es decir, que el intervalo contiene al dato o número; en cambio,

(= Significa intervalo abierto, indicando lo contrario; es decir, que no lo contiene.

Esta información nos servirá para conocer cuantos datos están contenidos dentro de cada intervalo de clase, por ejemplo:

Para en el primer intervalo de clase : [49 , 53) tendremos los siguientes datos que los llamaremos frecuencias absolutas de la primera clase: [49, 49.8, 49.8 , 50.0, 50.3, 50.5, 50.5, 50.6, 51.0, 52.0); el 53.5 lo tomaremos en cuenta hasta el siguiente intervalo, así sucesivamente, hasta completar toda la distribución o conjunto de datos.

El siguiente paso para construir la Tabla de Frecuencias, es contar el número de observaciones que pertenecen a cada clase. Este número es llamado Frecuencia Absoluta de clase **(f_a);** Quedando de la siguiente manera:

Intervalos De Clase	Conteo	Frecuencia Absoluta(f_a)	Marca de Clase (Mc)
[49 , 53)	//// //// //	10	51
[53 , 57)	//// ///	7	55
[57 , 61)	//// /	5	59
[61 , 65)	///	3	63
[65 , 69)	//// ///	7	67
[69 , 73]	//// ////	8	71
Total		n=∑40	

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Tabla 3

Ahora calcularemos el punto medio o marca de clase de cada intervalo; sumando el límite de clase superior e inferior de cada clase y luego lo dividiremos entre 2, originándose las siguiente fórmula:

$$Mc = \frac{Li + Ls}{2}$$

Donde:

Mc= Marca de clase o punto medio
Li= Límite inferior
Ls= Límite Superior

Entonces la marca de clase o punto medio de la primera clase será:

$Mc = \frac{49 + 53}{2} = 51$; Y así sucesivamente con todas las clases, las marcas de clase se muestran en la distribución de frecuencias absolutas

MEDIA ARITMÉTICA PARA DATOS AGRUPADOS

Para calcular esta medida de centralización o tendencia central se tomaran en cuenta las frecuencias absolutas y la marca de clase de cada clase; mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{X} = \frac{\sum \mathrm{Mcfa}}{n}$$

Donde:

$\overline{X}$ = Media aritmética
$\sum$ = Sumatoria
Mc= Marca de clase
$f_{a=}$ Frecuencia absoluta
n= Número de datos (frecuencias absolutas) de la distribución.

Ejemplo: De la tabla 3 calcularemos; la Media aritmética para datos agrupados; Aplicando la fórmula tendremos lo siguiente:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum \mathbf{Mcfa}}{n}}$$

$$\overline{X} = \frac{(10)(51)+(7)(55)+(5)(59)+(3)(63)+(7)(67)+(8)(71)}{40}$$

$$\overline{X} = \frac{510+385+295+189+469+568}{40} = \frac{2416}{40} \Rightarrow \boxed{\overline{X} = 60.4}$$

MEDIANA PARA DATOS AGRUPADOS.

Para determinar la mediana nos apoyaremos en la siguiente fórmula:

$$\tilde{x} = \widehat{L}_i + \left(\frac{\frac{\sum n}{2} - \sum f_a anteriores}{f_{mediana}} \right) \bullet A$$

Donde:

$\widehat{L}_i$ = Límite inferior de la mediana

$\sum n =$ Suma total de frecuencias absolutas

$\sum f_a anteriores$ = Suma de todas las frecuencias absolutas que anteceden a la mediana

f $_{mediana}$ = Frecuencia de la mediana

A= Amplitud del intervalo de clase

Ejemplo: De la tabla que se muestra a continuación calcularemos la mediana para esta distribución.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Intervalos De Clase	Frecuencia Absoluta(f_a)
[49 , 53)	10
[53 , 57)	7
[57 , 61)	5 $\boxed{\tilde{X}}$
[61 , 65)	3
[65 , 69)	7
[69 , 73]	8
Total	n=∑40

Tabla 3

Determinaremos primero $\frac{\sum n}{2}$ que será en nuestro caso $\frac{40}{2}=20$, después contaremos el total de frecuencias absolutas de la segunda columna hasta llegar a 20, sin exceder de esta cantidad ($(n \leq 20)$, es decir:

$\sum f_a anteriores =$ 10+7=17; ya que 17 es menor que 20 entonces

$f_{\text{mediana}} = 5$

$\hat{L}_i = \quad 5$

A=61-57=4;

Sustituyendo los valores encontrados en la fórmula para la mediana, tendremos:

$$\tilde{x} = 57+\left(\frac{17-5}{5}\right)\bullet 4$$

$$\tilde{x} = 57+\left(\frac{12}{5}\right)\bullet 4 \Rightarrow \tilde{x} = 57+9.6$$

$$\boxed{\tilde{x} = 66.6}$$

En el caso en que el número de clases de una distribución de frecuencias sea impar como la siguiente distribución de frecuencias, la mediana caerá en la clase que se encuentra a la mitad o en medio de la distribución

	Limites De Clase	Frecuencias absolutas
	[redacted]0,40	4
	[redacted]0,50	5
$\hat{x} \rightarrow$	[redacted]0,60	8 3
	[redacted]0,70	2
	70,80	1
	total	20

Esto significa que la clase que contiene a la mediana será la tercera clase, por lo tanto la mediana será:

$$\hat{x} = 50+\left(\frac{10-9}{8}\right)(10) \Rightarrow \quad \hat{x} = 51.25$$

MODA PARA DATOS AGRUPADOS.

Para calcular la moda, en una distribución de frecuencias absolutas, observaremos la columna de las frecuencias absolutas, después escogeremos la frecuencia mayor de todas ellas. Ejemplo. La siguiente distribución de frecuencias nos muestra las estaturas de 35 alumnos elegidos aleatoriamente

Limites de clase	Frecuencias absolutas
$.50-155$	4
$.55-160$	6
$.60-165$	8
$.65-1.70$	10
$.70-1.75$	5
$.75-1.80$	2
Totales	35

Tabla 4

En este caso específico será 10 la frecuencia mayor de todas las frecuencias absolutas. Después procederemos a determinarla con la siguiente fórmula:

$$\boxed{\hat{x} = \hat{L}i + \left(\frac{d_a}{d_a + d_p}\right) A}$$

Donde:

$\hat{x} =$ Moda para datos agrupados

$\hat{L}_i$ = Límite inferior modal

d_a= Diferencia anterior

d_p= Diferencia posterior

Luego entonces:

L_i=1.65
d_a=10-8=2
d_p=10-5=5
A=0.05

Sustituyendo los datos se tiene:

$$\hat{x} = 1.65 + \left(\frac{2}{2+5}\right)(0.05) \Rightarrow \hat{x} = 1.65 + \left(\frac{2}{7}\right)(0.05)$$

$$\hat{x} \cong 1.66$$

3.2. MEDIDAS DE VARIABILIDAD O DISPERSIÓN

Se llaman medidas de dispersión o variabilidad aquellas que permiten retratar la distancia de los valores de la variable a un cierto valor central, o que permiten identificar la concentración de los datos en un cierto sector del rango de la variable.

Las medidas de tendencia central tienen como objetivo el sintetizar los datos en un valor representativo, las medidas de dispersión nos dicen hasta que punto estas medidas de tendencia central son representativas como síntesis de la información. Las medidas de dispersión cuantifican la separación, la dispersión, y la variabilidad de los valores de la distribución respecto al valor central. Distinguimos entre medidas de dispersión absolutas, que no son comparables entre diferentes muestras y las relativas que nos permitirán comparar varias muestras.

Como objeto de análisis para variables numéricas podemos hacernos la siguiente pregunta:

Puesto que se agrupan alrededor de un número, ¿cómo lo hacen? ¿Muy concentrados? o ¿muy dispersos?

Medidas de Dispersión o Variabilidad

- Medidas de dispersión Relativas
  - a) Rango
  - b) Desviación Media
  - c) Varianza
  - d) Desviación típica o Estándar
- Medidas de dispersión absolutas
  - a) Coeficiente de variación de Pearson

3.2.1 Medidas de Variabilidad o Dispersión Absolutas

a) Rango (R) es una medida razonable de Variabilidad llamada también en algunas ocasiones amplitud y que se obtiene restando el valor más bajo de un conjunto de observaciones del valor más alto. Es fácil de calcular y sus unidades son las mismas que las de la variable, aunque posee varios inconvenientes o desventajas tales como las siguientes:

Ventajas y desventajas del Rango

Ventajas

a) Es fácil de calcular y es comúnmente usado como una medida burda pero eficaz de variabilidad

b) Es comprensible para cualquier persona; aun cuando no conozca de Estadística

Desventajas

a) No utiliza todas las observaciones (sólo dos de ellas) los extremos, ignorando los valores intermedios

b) Se puede ver muy afectado por algunas observaciones o datos extremos

c) El rango aumenta con el número de observaciones, o bien se queda igual. En cualquier caso nunca disminuye.

d) No es aconsejable para muestras grandes sólo para muestras pequeñas

b) Desviación Media Se define como la media de las diferencias en valor absoluto de los valores de la variable a la media (D:M); es decir, que se define como desvió que es la diferencia que se observa entre la variable y la media aritmética.

$|x-\bar{x}|$ Cada valor individual x se desvía de la media por una cantidad igual a. $(x-\bar{x})$

Esta Desviación $(x-\bar{x})$ es cero cuando x es igual a $\bar{x}$.

La desviación $(x-\bar{x})$ es positiva si x es mayor que $\bar{x}$ y negativa si x es mayor que $\bar{x}$.

Sin embargo, como la suma de las desviaciones $\sum(x-\bar{x})$ es exactamente cero debido a que la Desviación Media, siempre es igual a cero no es un estadístico de utilidad.

c) Varianza: cuyo símbolo es (S^2), es la media de las desviaciones al cuadrado, calculada usando n o n-1 como divisor.

d) Desviación típica o Standard: cuyo símbolo es (S), es simplemente la raíz cuadrada de la varianza.

La varianza y la desviación miden la dispersión promedio alrededor de la media; es decir, como las observaciones mayores fluctúan por encima de ésta y como las observaciones menores se distribuyen por debajo de ésta como medidas de variabilidad más importantes.

Características de la varianza y la desviación estándar o típica.

a) Son índices que describen la variabilidad o dispersión y por tanto cuando los datos están
Muy alejados de la media, el numerador de sus fórmulas será grande y la varianza y la
Desviación estándar o típica también lo serán.
b) Al aumentar el tamaño de la muestra, disminuye la varianza y la desviación estándar.
c) Cuando todos los datos de la distribución son iguales, la varianza y el desvío estándar son Iguales a 0.
d) Para su cálculo se utilizan todos los datos de la distribución; por tanto, cualquier cambio de
Valor será detectado.
e) En el caso de la varianza esta será siempre positiva

3.2.2 Medidas de Variabilidad o Dispersión Relativas

Coeficiente de variación de Pearson

El problema de las medidas de dispersión absolutas es que normalmente son un indicador que nos da problemas a la hora de comparar. Muestras de variables que entre sí no tienen cantidades en las mismas unidades, de ahí que en ocasiones se recurra a medidas de *dispersión relativas*.

Cuando se quiere comparar el grado de dispersión de dos distribuciones que no vienen dadas en las mismas unidades o que las medias no son iguales se utiliza el llamado "*Coeficiente de Variación de Pearson*" y que se define como la relación por cociente entre la desviación estándar y la media aritmética; o en otras palabras, es la desviación estándar expresada como porcentaje de la media aritmética

3.2.3 Medidas de dispersión o Variabilidad para datos agrupados

Recuerda que el rango es una medida de dispersión o variabilidad que se obtiene restando el dato mayor del menor; y en algunas ocasiones recibe el nombre de recorrido y que no lo deberás confundir con el rango visto en Matemáticas 4

a) Rango o recorrido. La fórmula para calcular el rango o recorrido es la siguiente:

$$\boxed{R=Dm-dm}$$

Donde:

R= Rango
Dm= Dato Mayor de la distribución
Dm= dato menor de la distribución

Ejemplo: Tenemos los siguientes datos, que representan los montos de 20 préstamos personales, en dólares, en una compañía financiera de consumidores: 900, 500, 450, 1900, 1200, 1250, 2500, 550, 1650, 1200, 1000, 550, 650, 600, 750, 1300, 850, 350, 1400, 700,

El rango de estos 20 préstamos será:

R=2500-350
R=2150

La desviación media se calculara utilizando primordialmente utilizando el valor de la media aritmética mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{D.M=\frac{\sum\left|x-\bar{x}\right|}{n}}$$

En el caso de la desviación media el valor absoluto significa la distancia de cada uno de los datos con respecto ala media aritmética (Desvío)

Donde:

D.M = desviación media
$\sum$ = sumatoria
$\left|\;\right|$= Valor absoluto
x= cada uno de los datos de la distribución
$\bar{x}$ = Media aritmética de los datos de la distribución

Ejemplo: *En seis sábados consecutivos un operador de taxis recibió 9, 7, 11, 10, 13 y 7 llamadas a su sitio para su servicio. Determina la Desviación media.*
Para calcular la media.

c) Varianza (S^2) Para calcular la varianza para datos no agrupados nos apoyaremos en la siguiente fórmula:

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

Donde:
S^2= Varianza
$\sum = sumatoria$
x=cada uno de los datos de la distribución
$\bar{x}$ = Media aritmética
n=total de datos de la distribución

Esta varianza se obtiene como la suma de las diferencias de los cuadrados y por tanto tiene unidades de medida el cuadrado de las unidades de medida en que se mide la variable estudiada

Como ejemplo: Las calderas de una planta de energía de vapor a alta presión tuvieron las siguientes eficiencias en porcentajes: 90.3, 91.6, 90.9, 90.4, 90.3, 91.0, 87.9, 89.4.

La media aritmética para este conjunto de datos será:

$$\bar{x} = \frac{90.3+91.6+90.9+90.4+90.3+91.0+87.9+89.4}{8} = \frac{721.8}{8} = 90.225$$

Por lo tanto, el promedio de la eficiencia de las calderas será 90.23
La varianza será:

$$s^2 = \frac{(90.3-90.3)^2 + (91.6-90.23)^2 + ... + (80.4-90.23)^2}{8-1} \cong 8.65$$

d) Desviación Típica o estándar(S) La fórmula para determinar esta mediada estadística será la siguiente:

$$\boxed{s = +\sqrt{s^2}}$$

Donde
s=desviación típica o estándar
s^2= varianza de la distribución

Recuerda que la desviación típica o estándar sólo tomará los valores positivos del radical

La desviación típica o estándar del ejemplo anterior será:

$$s = \sqrt{8.65} = 2.94$$

Esto significa que las eficiencias de la caldera de la planta de energía se dispersan en promedio 2.94 unidades con respecto a la media aritmética

TAREA 1

Nombre ____

Núm. de lista __________ Grupo ______________ Turno __________

Núm. de Expediente ________________ Fecha ________________

INSTRUCCIONES: Cita un ejemplo tomado de la vida real en el cual la media aritmética es más útil que la moda o la mediana. Haz lo mismo para la moda y la mediana.

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 2

Nombre ____

Núm. de lista __________ Grupo _______________ Turno __________

Núm. de Expediente __________________ Fecha __________________

INSTRUCCIONES: Indagar en que situaciones o casos el cálculo de la varianza y de la desviación estándar utilizan como denominador (n-1) y en cuáles casos n.

Revisión: ____

Observaciones: ____

____

____

____

TAREA 3

Nombre ____

Núm. de lista _____________ Grupo ____________________ Turno ____________

Núm. de Expediente _______________________ Fecha _______________________

INSTRUCCIONES: Consigue en tu casa por lo menos 7 recibos de pago del consumo de agua y con los siete montos de pago calcula las distintas medidas de centralización y dispersión.

Revisión: ____

Observaciones:____

____

____

____

TAREA 4

Nombre ____

Núm. de lista __________ Grupo _______________ Turno __________

Núm. de Expediente __________________ Fecha __________________

INSTRUCCIONES: A cada integrante de tu familia pregunta su edad y peso, posteriormente calcula el coeficiente de variación para los datos obtenidos de cada variable y determina donde se presenta mayor variación.

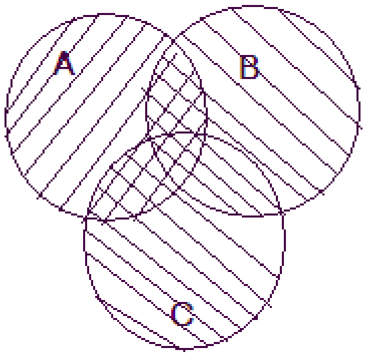
Revisión: ____

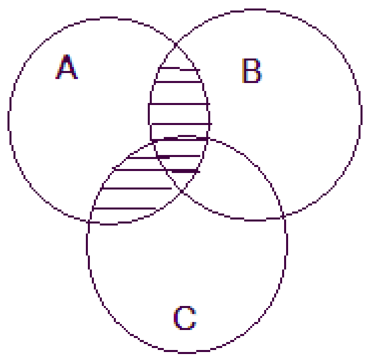
Observaciones:____

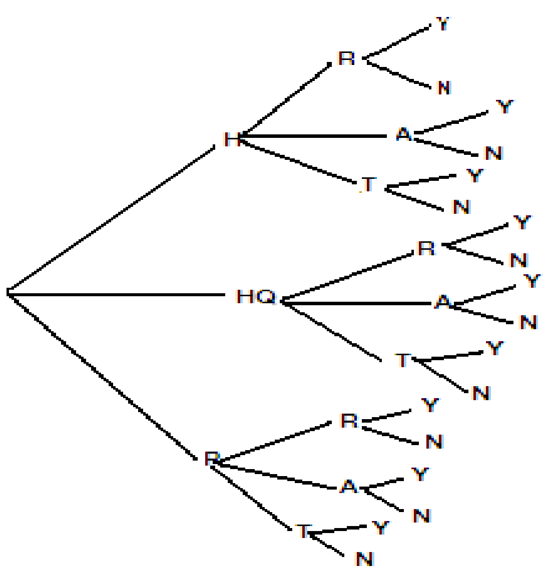
____

____

____







Unidad 4
Probabilidad

Objetivos:

El alumno:

Resolverá problemas de cálculo de probabilidad simple, utilizando las técnicas de conteo y las reglas de probabilidad, según el tipo de evento que mejor aplique al propósito y tipo de datos, mostrando interés por la calidad de trabajo y respeto es su participación grupal

Temario:

- Teoría de Conjuntos.
- Conceptos básicos de probabilidad.

4.1. TEORÍA DE CONJUNTOS

Conceptos básicos

El concepto de *Conjunto* aparece en todas las ramas de las Matemáticas. De manera intuitiva, un conjunto (1) es cualquier lista bien definida o cualquier colección de objetos, y será representado por las letras mayúsculas A, B, Y, X, etcétera.

Los objetos que componen al conjunto se llaman sus elementos (2) o miembros, y se escriben con letras minúsculas a, b, x, y, etcétera.
Algunos conjuntos básicos de la matemática, llamados también Campos Numéricos:

Ejemplos de conjuntos son:
$\varnothing$: Conjunto vacío, que carece de elementos.
N: Conjunto de los números naturales.
Z: Conjunto de los números enteros.
Q: Conjunto de los números racionales.
R: Conjunto de los números reales.
C: Conjunto de los números complejos.

Un **conjunto:** es la reunión en un todo de objetos bien definidos y diferenciables entre sí, que se llaman elementos del mismo. O también puede ser una colección de objetos.

Si *a* es un elemento del conjunto *A,* se denota con la ***relación de pertenencia*** a $\in$ A. En caso contrario, si *a,* no es un elemento de *A,* se denota $a \notin A$.
Algunos ejemplos de pertenencia son:

Se puede decir que el símbolo $\in$ se utiliza para comparar o relacionar un conjunto respecto de un elemento y nos permite relacionar la pertenencia o no, de un elemento en un conjunto. *No es correcto utilizar este símbolo para comparar dos conjuntos si no que exclusivamente para relacionar elementos respecto de un conjunto.* Ejemplo:

CONJUNTOS	ELEMENTOS	PERTENENCIA
D= Un día de la semana	l = lunes	$l \in D$
M= Un mes del año	m = Mayo	$m \in M$
Z= Número entero	n = 2	$n \in Z$

Formas de definir un conjunto

1. Enumerando todos los elementos del conjunto (sólo si es finito)
2. Por medio de una propiedad característica de los elementos que forman a ese conjunto, esta propiedad puede expresarse de forma ordinaria o utilizando alguna simbología lógica.
3. Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas latinas, los elementos se colocan entre llaves, por ejemplo:

DEJAR SANGRIA

A ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

B = {a, v, e, s}
C = {Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ }

N = {1,2,3,4,5,6,...} = {números naturales}

L = { $x = \dfrac{n(n+1)}{2}$ donde n =1, 2, 3, 4,...}

Sin embargo, existen formas más formales para describir el contenido de un conjunto como son los siguientes:

Formas de determinar un conjunto

Para determinar la forma de describir cómo han de agruparse los conjuntos comúnmente se utilizan dos formas: La Forma Tabular o extensiva y la forma Constructiva o por extensión

Forma tabular o extensiva: Es cuando el conjunto es determinado por extensión (o enumeración), cuando se da una lista que comprende a todos los elementos del conjunto y sólo a esos elementos. *Ejemplos*:

A = { a, e, i, o, u }
B = { 0, 2, 4, 6, 8 }
C = { c, o ,n , j, u, t, s }
D = {A, B, E, C, D, R, I, O}

Forma constructiva o por comprensión: Es cuando un conjunto es determinado por comprensión, o sea cuando se da una propiedad que la cumpla para todos los elementos del conjunto. *Ejemplos:*

A = { x I x es número entero}
B = { x I x es un número par menor que 10}
C = { x I x es una letra de la palabra conjuntos}
D = {x I x es una mujer de nacionalidad mexicana}
E = {x I x es color básico}

A continuación se muestra un cuadro comparativo de cómo describir dos conjuntos mediante la forma tabular o extensión y la forma constructiva o por comprensión.

CUADRO COMPARATIVO

POR EXTENSIÓN	POR COMPRENSIÓN
A = {a, e, i, o, u }	A = {x/x es una vocal}
B = {0, 2, 4, 6, 8}	B = { x/x es un número par menor que 10 }
C = { c, o, n, j, u, n, t, s}	C = {x/x son las letras de la palabra conjuntos}
D = {mercurio}	D = { x/x es un metal liquido}

Conjuntos finitos e infinitos

Un conjunto se dice finito si existe una biyección de los elementos del conjunto con los números naturales $\mathbb{N}$, en caso contrario se dice que el conjunto se define como infinito.

Se dice que existe una asociación es biyectiva de A a B si existe una función de A en B que asocia uno y solo uno de los elementos Ejemplos:

A = {x/x es la solución de $X^2+2x+1=0$}	Finito
B = {x/x 0,1,2,3,4,5,6,7 . . . }	Infinito
C = { x/x es un número par}	Infinito
W = { 3, 6, 9, 12, 15, 18,21, 24, 27}	Finito

EJERCICIO 1

Instrucciones:
Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son finitos e infinitos

a) Los meses del año
b {1,2,3,……..99,100}
c) Los habitantes de la tierra
d) {X/X es un número par}
e) {1,2,3………}

Igualdad de conjuntos

Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales: cuando ambos tienen los mismos elementos; es decir, si cada elemento de A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A. La igualdad se denota A = B.

Dados dos conjuntos A y B (que pueden ser iguales o distintos), podemos preguntarnos sobre las formas cómo podemos "relacionar" los elementos de A con los de B conjunto.

Ejemplo: los elementos del conjunto dado:
A = {1, 2, 3} se pueden relacionar o hacer corresponder mediante una correspondencia ***f*** con los del conjunto
B = {x, y, z} De modo que a todo elemento de A le corresponda uno, ninguno o varios elementos de B.

Esto se puede expresar también así: f(1) = {x, z}, f(2) = { } , f(3) = {z}.

También se puede decir que f = {(1, x), (1, z), (3, z)}.

Por tanto, una relación o correspondencia entre dos conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano A × B.

En general, una relación o correspondencia entre un conjunto A y otro B es cualquier subconjunto de A × B.

Nótese que este incluye el caso del conjunto vacío. NO es obligatorio, que TODO elemento de A, esté relacionado con alguno de B para decir que ese subconjunto de A × B es una relación o correspondencia de A en B.

Cuando una correspondencia es tal que a CADA elemento del primer conjunto le corresponde UNO Y SÓLO UNO del segundo conjunto, entonces se llama aplicación o función (este último nombre es tal vez el más común en Latinoamérica, en las traducciones mexicanas prefieren llamarlas aplicaciones o mapeos).

Ejemplo: El conjunto {a, b, c } también puede escribirse:
{ a, c, b }, { b, a, c }, { b, c, a}, { c, a, b }, { c, b, a }

En teoría de conjuntos, se acostumbra no repetir los elementos, por ejemplo:
El conjunto {b, b, b, d, d} , simplemente se notará {b, d}.

EJERCICIO 2

1. El conjunto A= {X/X 3X = 6}. ¿Es A = 2 ?

2. ¿Cuál de los siguientes conjuntos son iguales?
   {s,t,r,s},{t,s,t,r}, {s,r,s,t}

CONJUNTO VACÍO **(∅)**
El conjunto vacío es el único conjunto que no tiene ningún elemento. La notación que se utiliza para representarlo es ∅.

EJERCICIO 3

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales:
   ∅ , {0}, { ∅ }

2. Determinar si alguno de los siguientes conjuntos es vacío
   i) X ={X/X X^2 =9 y 2x = 4}
   ii) Z = { X/X X+8 = 8 }

4.1.1 Definición de conjunto, subconjunto y conjunto universal

Definición de conjunto

Un conjunto es una colección de elementos, donde todos los elementos Son diferentes entre sí.
Si el conjunto A está formado por los elementos 1, 2,3 Escribiremos:
A = {1, 2, 3}. Pondremos $3 \in$ A y lo leeremos pertenece a “A”

Definición de subconjunto: Se dice que un subconjunto B es un Subconjunto de A si todo elemento de B es elemento de A. También puede decirse que B está incluido en A. La notación que se utiliza es $B \subseteq A$ o $B \subset A$
Ejemplo 1
B= {1, 3,5} es subconjunto de

A= {1, 2, 3, 4,5}, formalmente se definirá así: $B \subseteq A$ si $\forall X$
$X \in A$ y $X \in B$

Conjunto potencia

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto N se llama Conjunto Potencia de N. Se le denota como 2^N .ó P (s)

EJEMPLOS
a).- Si N = {1, 2 } como podemos ver el conjunto tiene dos elementos y el conjunto potencia tendrá $2^2 = 4$ elementos y son:

$$2^N = \{\{1\},\{2\},\{3\},\phi\}$$

b).- Si ahorra el conjunto N consta de tres elementos el, N = {1, 2, 3}, el conjunto potencia tendrá 8 elementos y son:

$$2^N = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\}\ \{2,3\}\ \{1,2,3\},\phi\}$$

Teorema Si un conjunto N es finito con "n" elementos, entonces su conjunto potencia 2^N tendrá 2^n elementos.

EJERCICIO 4

1. Encontrar el conjunto potencia P (s) del conjunto S={ 1,2, 3}

Conjunto universal

Es el conjunto que contiene a todos los elementos del Universo, se le denota por la letra “U”. El universo lo forman el conjunto de conjuntos que intervienen.

Ejemplos: Sean los conjuntos:

A = {aves} B = {peces} C = {anfibios} D = {tigres}

Existe otro conjunto que incluye a los conjuntos A, B, C y D y es conjunto de todos los animales

U = {*animales*}, Que es el conjunto universal de todos los anteriores.

Relación de inclusión
La relación fundamental que se puede definir entre conjuntos es la relación de inclusión

Conjuntos disjuntos

Se les llama así, cuando dos conjuntos A y B no tienen ningún elemento común entonces A y B son disjuntos. Ejemplos de conjuntos disjuntos y no disjuntos:

1.- Cuando A y B son disjunto no tienen ningún elemento en común. Sea A = {x I x es par} y B = {x I x es impar}.

2.- Estos dos conjuntos tienen a las vocales en común por lo tanto no son disjuntos:

Sea A = {x I x es una vocal} y B = {x I x es una letra del abecedario}.

4.1.2 Unión de dos conjuntos

La unión de dos conjuntos, se denota con el símbolo (U), por ejemplo en la unión de los conjuntos A y B es el conjunto A ∈ B, que tiene por elementos todos los elementos de A y todos los de B. Formalmente se expresa de la siguiente forma:

$$\forall X ; X \in A \cup B \Leftrightarrow X \in A Ó X \in B$$

Ejemplos: Si A = {1, 3, 5, 7, 9, 10} y

B = {2, 4, 6, 8, 10} entonces:

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ,10}

Las propiedades principales de la unión de conjuntos son las tres siguientes:

.

PROPIEDAD ASOCIATIVA: $A \cup (B \cup C)$

PROPIEDAD CONMUTATIVA: $(A \cup B) = (B \cup A)$

PROPIEDAD DE IDEMPOTENCIA: AU A=A

Si o ⇔ ...
... son dos formas abreviadas de representar en matemáticas "si y sólo si".

∀x...

... es una forma de indicar ‘para todo x’. Es decir, ∀ es un cuantificador universal.

Si combinamos la unión con la inclusión tendremos: $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$, que tiene por elementos aquellos que pertenecen simultáneamente a *A* y a *B; O que se repiten en ambos conjunto,* formalmente lo indicamos así: $\forall x \;\; x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ *y* $x \in B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ entonces $A \cap B = \{10\}$

Las propiedades principales de la intersección de conjuntos son las siguientes:

a) PROPIEDAD ASOCIATIVA: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

b) PROPIEDAD CONMUTATIVA: $A \cap B = B \cap A$.

c) PROPIEDAD DE IDEMPOTENCIA: $A \cap A = A$.

Si combinamos la intersección con la inclusión obtendremos:
$A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Combinando la intersección con la reunión obtendremos las propiedades Distributivas:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Y las propiedades de absorción:
a) $A \cap (A \cup B) = A$
b) $A \cup (A \cap B) = A$.

Si la intersección de dos conjuntos es vacía es decir no hay ningún elemento en común entonces se dice que A y B son disjuntos; es decir $A \cap B = \varnothing$

Complemento relativo o diferencia de conjuntos

El complemento relativo de un conjunto B con respecto a un conjunto A o simplemente, la diferencia de A y B denotada por (\ ) y se expresa como:

A \ B es el conjunto de elementos que pertenecen a "A" pero no pertenecen a "B".

Y formalmente lo indicamos así:

$\forall X$,
A \ B
$A \setminus B \Leftrightarrow X \in A, X \notin B$

Ejemplo: Si A= {1, 2, 3,4} y B= {3, 4, 5,6}, entonces A \ B= {1,2}

Complemento absoluto.

El complemento absoluto o simplemente complemento de un conjunto A, expresado por (A') es el conjunto de elementos que no pertenecen a A. y formalmente lo indicamos así:

$\forall X \quad A' \Leftrightarrow X \in U, X \notin A$

Ejemplo: U= {1, 2,3,……} y A= {1,2, 3,4,}. Entonces A' = {5, 6,7,……}

EJERCICIO 5

Instrucciones.
1 Determina las siguientes operaciones entre conjuntos

U={ 1,2, …….8, 9 } , A= {1,2,3,4 } , B={ 2, 4, 6, 8} y C = { 3, 4, 5, 6}

2 Determinar:
- a) A'
- b) $A \cap C$
- c) $(A \cap C)'$
- d) $A \cup B$
- e) $B \setminus C$

Los conjuntos bajo las operaciones descritas anteriormente satisfacen varias leyes o identidades que se enumeran en la siguiente tabla.

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS
Leyes de idempotencia 1. $A \bigcup A$ $\qquad A \bigcap A$
Leyes asociativas 2. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ $\qquad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$
Leyes Conmutativas 3. $A \bigcup B = B \bigcup A$ $\qquad A \bigcap B = B \bigcap A$
Leyes distributivas 4. $A \bigcup (B \cap C) = (A \cup B) \bigcap (A \bigcup C)$ $\qquad A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$
Leyes de Identidad 5. $A \bigcup \varnothing = A$ $\qquad A \bigcap \varnothing = \varnothing$ $A \bigcup U = U$ $\qquad A \bigcap U = A$
Leyes de Complemento 6. $A \bigcup A^{\chi} = U$ $\qquad A \bigcap A^{\chi} = \varnothing$ $(A^c)^c = A$ $\qquad U^c = \varnothing$, $\varnothing^c = U$
Leyes de De Morgan 7 $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$ $\qquad (A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$

Tabla 4.1

Diagramas de Venn

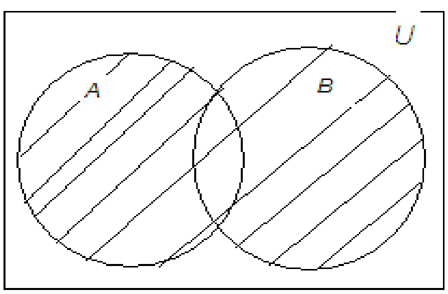
Estos diagramas, son llamados así, por el nombre de su inventor, Leonhard Euler quien nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza, murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia, quien vivió en Rusia la mayor parte de su vida. Probablemente fue uno de los más grandes matemáticos de la historia, comparable a Gauss, Newton o Arquímedes.

Los diagramas de Ven se usan para representar gráficamente la relación matemática o lógica entre diferentes grupos de cosas (conjuntos), representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo.

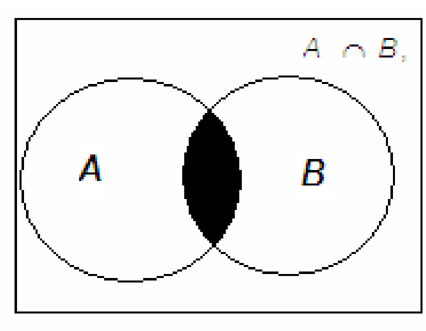
La forma en que esos círculos se sobreponen entre sí muestra todas las posibles relaciones lógicas entre los conjuntos que representan. Por ejemplo, cuando los círculos se superponen, indican la existencia de subconjuntos con algunas características comunes.

Operaciones entre conjuntos

La parte sombreada que se muestra en la gráfica a continuación representa las distintas operaciones entre conjuntos

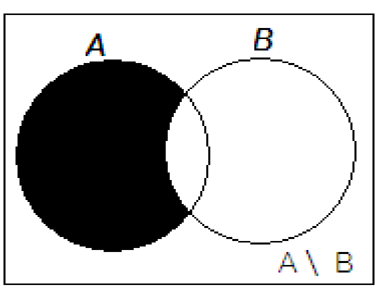


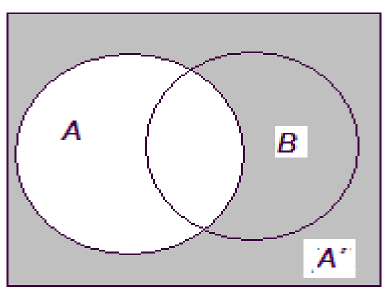
AUB



A) UNIÓN

B) INTERSECCIÓN





C)DIFERENCIA

D)COMPLEMENTO

EJEMPLOS 1:

1. Dados los siguientes conjuntos: $A = \{2, 4, 6, 8,10\}$, $B = \{0, 1, 2,3\}$, $C = \{-1,-2, 0,3\}$ construye los diagramas de Venn–Euler de:

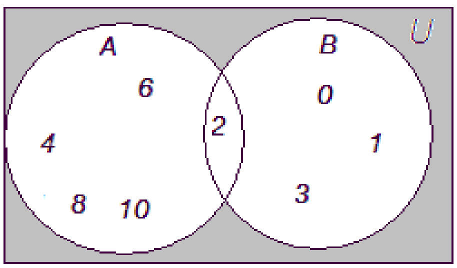
a) $A \cap B$,

b) $A \cap C$

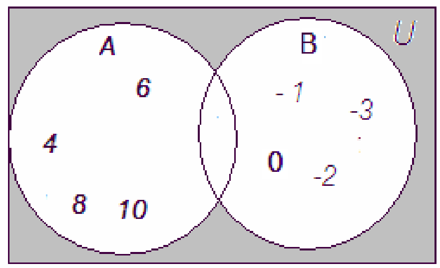
c) $B \cap C$

d) $A \setminus B$

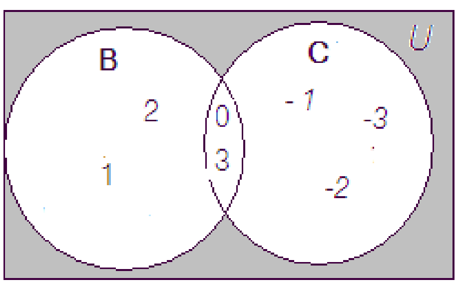
e) $A \setminus C$



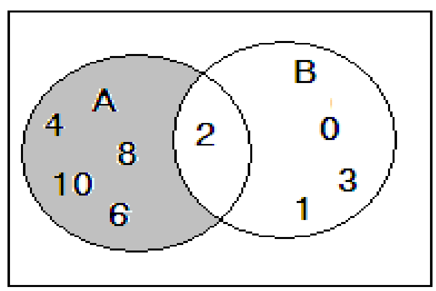
a) $A \cap B, = \{2\}$



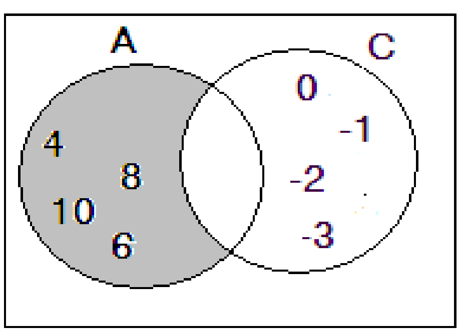
b). $A \cap C = \{\ \}$



c) $B \cap C = \{0,3\}$



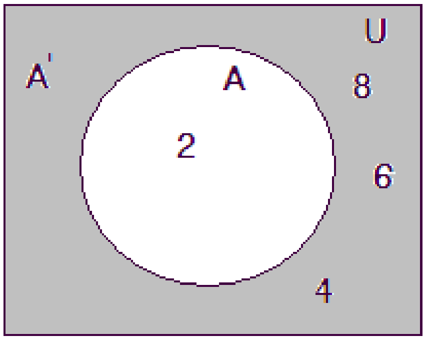
d) $A \setminus B = A - B = \{4, 6 , 8\ 10\}$



e) $A \setminus C = A - C = A = \{4, 6 , 8\ 10\}$

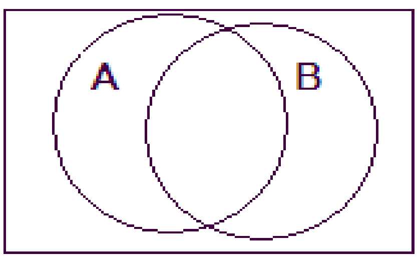
Ejemplo para complemento

Si el universo es $U = \{2, 4, 6, 8\}$ y $A = \{2\}$

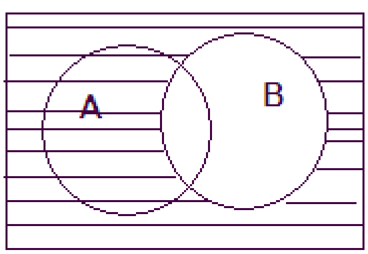


$A^c = \{4, 6, 8\}$

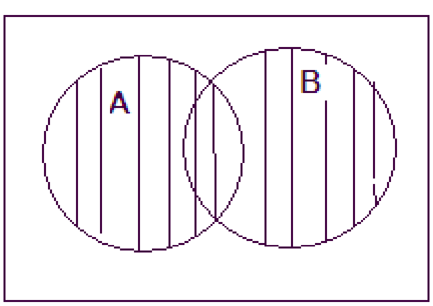
EJEMPLO 2. En el diagrama de Venn que sigue, sombrea:
a) B^c , b) $(A \cup B)^c$, c) $(B \setminus A)^c$, d) $A^c \cap B^c$

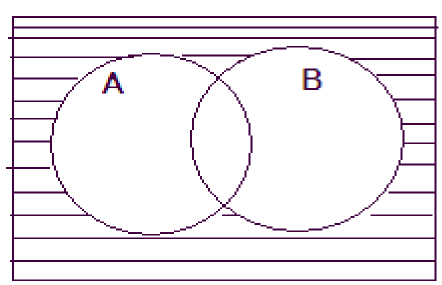


a) B^c consta de los elementos que no pertenecen a B; por lo tanto, se sombrea el área por fuera de B, como sigue:



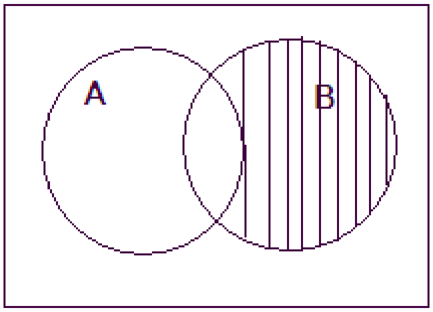
b) Primero se sombrea $A \cup B$, entonces $(A \cup B)^c$ es el área por fuera de $A \cup B$

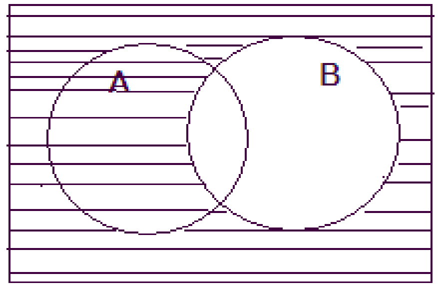




$A \cup B$ $(A \cup B)^c$

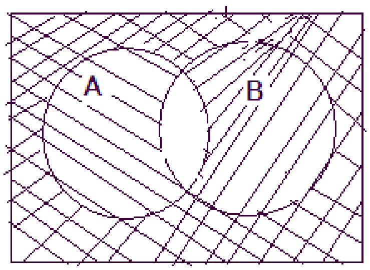
c) Primero Se sombrea (B\ A), el área de B que no está en A, entonces, $(B\setminus A)^c$ es el área por fuera de (B\ A

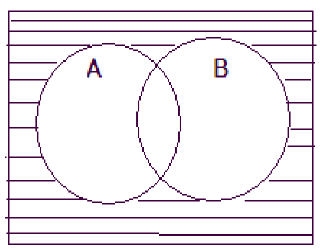




(B\ A) , $(B\setminus A)^c$

d) Primero se sombrea A^c el área por fuera de A, con rayas inclinadas hacia la derecha (////), y luego a B^c con rayas inclinadas hacia la izquierda (\\\\\\); entonces $A^c \cap B^c$ es el área donde se cortan las líneas.



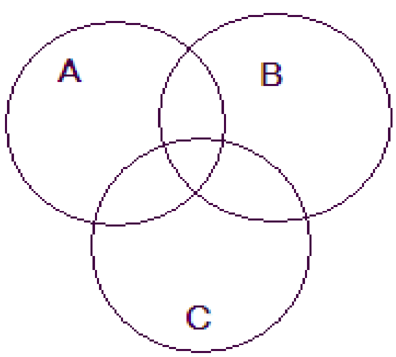


A^c y B^c $A^c \cap B^c$

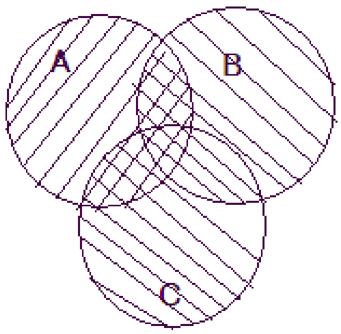
De acuerdo con la ley de De Morgan $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

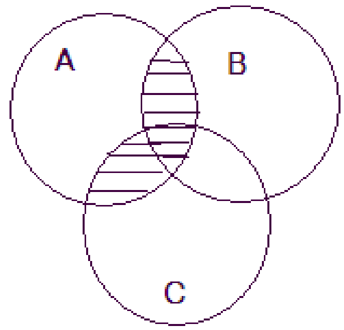
En el siguiente diagrama de Venn sombrear:

a) $A\cap (B \cup C)$ b) $(A\cap B) \cup (A\cap C)$



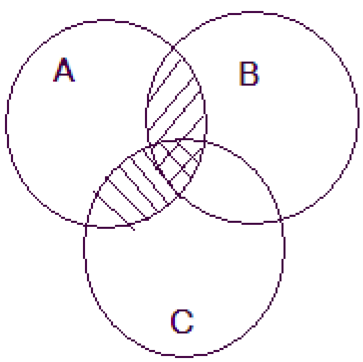
a) Primero se sombrea a A con rayas inclinadas hacia la derecha arriba, y luego a $B \cup C$ con rayas inclinadas hacia la izquierda; Ahora, $A \cap (B \cup C)$ es el área donde se cruzan las rayas.

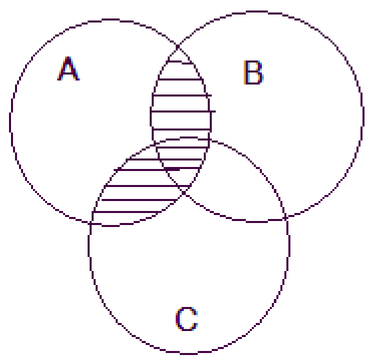




A Y $B \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C)$

b) Primero se sombrea $A \cap B$ con rayas inclinadas hacia la derecha arriba y luego a $A \cup C$ con rayas inclinadas hacia la izquierda arriba. Ahora $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ es el área total sombreada





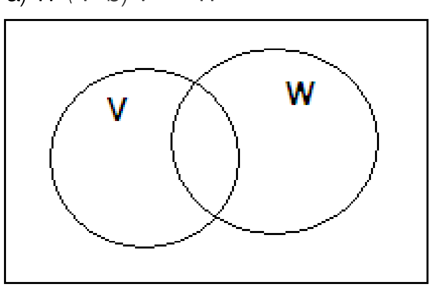
$A \cap B$ y $A \cap C$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Se observa que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ de acuerdo con la ley distributiva.

EJERCICIO 6

Instrucciones: en los siguientes diagramas de Venn, sombrear

I. a) $W \setminus V$ b) $V^c \cup W$

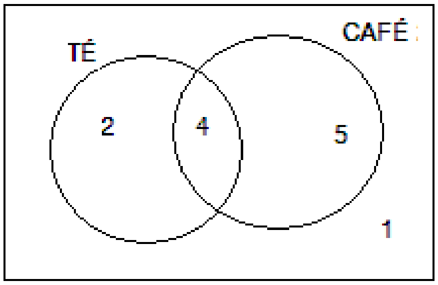


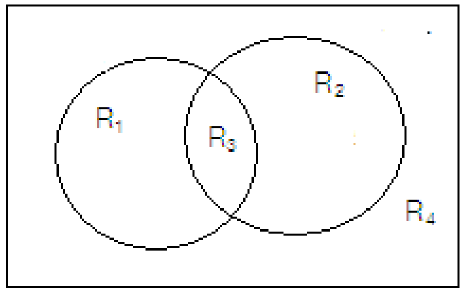
II. Probar mediante diagramas de Venn: $A \cup (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. En el diagrama que colocamos a continuación, se han volcado los datos obtenidos en una encuesta, realizada a personas, donde se les preguntó si tomaban té o café. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: solamente té, té y café, ninguna de las dos bebidas, etcétera.

El diagrama de Venn lo dividiremos por regiones; como sigue:





EJERCICIO 7

Con base en estos datos responderemos a las siguientes preguntas

1. *¿Cuántas personas tomaban té?*
   $R_1 + R_3 = 6$
2. *¿Cuántas personas tomaban té y café?*
   Solo $R_3 =$ 5 personas

3 ¿Cuántas personas no tomaban ninguna de las dos bebidas?
   Solo $R_4 =$ 1 persona

4. ¿Cuántas personas tomaban por lo menos una de esas dos bebidas?
   $R_1 + R_2 + R_3 =$ 11 personas
5. *¿Cuántas personas tomaban sólo una de esas dos bebidas*
   $R_1 + R_2 \;\; =$ 7 personas
6. *¿Cuántas personas tomaban sólo café?*

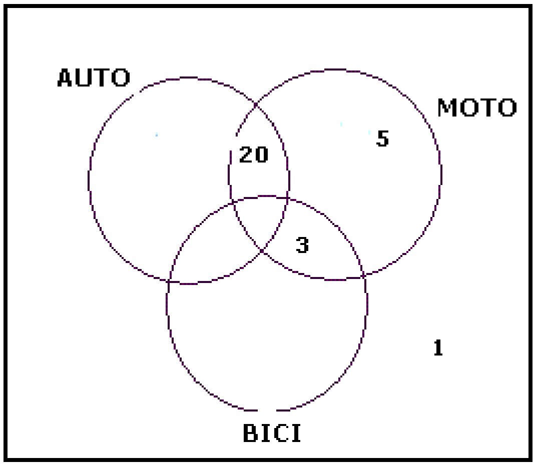
Solo $R_2 =$ 5 personas

2. Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes:

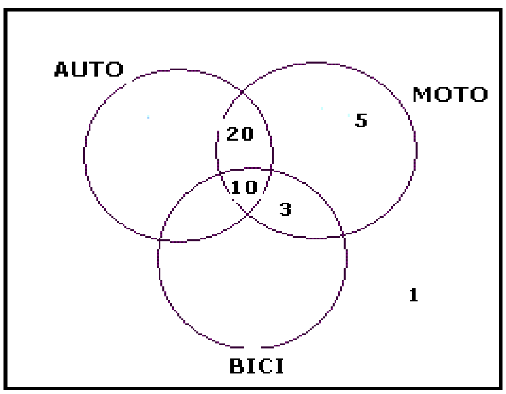
I) Motocicleta solamente: 5
II) Motocicleta: 38
III) No gustan del automóvil: 9
IV) Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil: 3
V) Motocicleta y automóvil pero no bicicleta: 20
VI) No gustan de la bicicleta: 72
VII) Ninguna de las tres cosas: 1
VIII) No gustan de la motocicleta: 61

1. ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
2. ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente?
3. ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente?
4. ¿A cuántos le gustaban las tres cosas?
5. ¿A cuántos le gustaba la bicicleta y el automóvil pero no la motocicleta?

Trataremos de poner en un diagrama de ven, para tres conjuntos los datos de la encuesta:

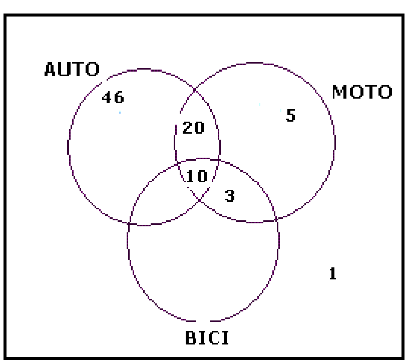


Nos encontraremos con que sólo cuatro de ellos, los números I), IV), V) y VII) se pueden poner directamente:

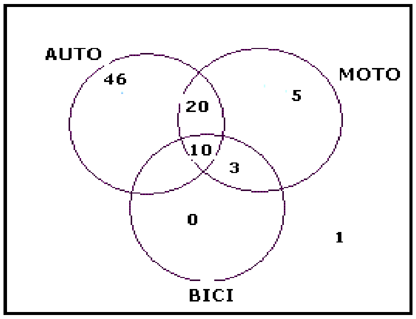


Ahora con el dato II) se puede completar la única zona que falta en el conjunto **MOTO,** haciendo la diferencia 38 - (20+5+3) = 10

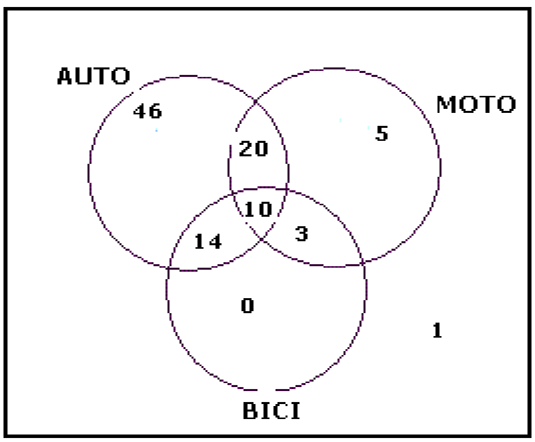
Luego utilizaremos el dato VI), si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto **BICI,** deberán sumar 72
Luego 72 - (20+5+1) = 46:



Después de ello, podremos usar el dato III), si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto AUTO, deberán sumar 9, luego 9 - (5+3+1) = 0:



Por último utilizaremos el dato VIII) si consideramos todas las zonas, excepto las cuatro correspondientes al conjunto MOTO, deberán sumar 61, luego 61 - (46+0+1) = 14:



Con lo que estamos en condiciones de responder a todas las preguntas:

a) A 99 personas
b) A ninguna
c) A 46 personas.
d) A 10 personas.
e) A 14 personas

EJERCICIO 8

Instrucciones. En los siguientes problemas determina mediante conjuntos de Venn lo que se te pide:

1) Una encuesta sobre 500 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de dos productos A y B:
   138 personas consumían A pero no B.
   206 personas consumían A y B.
   44 personas no consumían ni A ni B.

   a) ¿Cuántas personas consumían A?
   b) ¿Cuántas personas consumían B?
   c) ¿Cuántas personas consumían B pero no A?
   d) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los dos productos?

2. En un grupo de 90 alimentos,
   36 productos contienen azúcar,
   32 tienen acido cítrico y 32 conservador;
   6 productos contienen a la vez, azúcar, acido cítrico y conservador;
   12 contienen acido cítrico y azúcar,
   10 contienen conservador y azúcar, y finalmente
   8 contienen acido cítrico y conservador.
   a) ¿Cuántos productos contienen exclusivamente acido cítrico?
   b) ¿Cuántos sólo azúcar?
   c) ¿Cuántos contienen sólo conservador?

4.2. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

Probabilidad: definiciones y conceptos

Las Probabilidades pertenecen a la rama de la matemática que estudia ciertos experimentos llamados aleatorios; o sea, regidos por el azar, en que se conocen todos los resultados posibles, pero no es posible tener certeza de cuál será en particular el resultado del experimento.

Ejemplo, experimentos aleatorios cotidianos son el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, extracción de una carta de un mazo de naipes. Más adelante se verá que debemos distinguir entre los conceptos de probabilidades matemáticas o clásicas de las probabilidades experimentales o estadísticas.

LA PROBABILIDAD es el estudio de los fenómenos de los que no estamos seguros de su ocurrencia.

FENÓMENO: un fenómeno es la ocurrencia de un hecho o suceso. Los que nos interesan son aquellos fenómenos los cuales podemos observar.
Ejemplos de experimentos; Lanzamiento de un dado, lanzamiento de una moneda, un mazo de cartas, bolas en una urna, etcétera.

EXPERIMENTO: es un fenómeno observable perfectamente definido.

Debido a que el proceso de obtener toda la información relevante a una población particular es difícil y en muchos casos imposible de obtener, se utiliza una muestra para estimar la información necesaria para la toma de decisiones Muestra (n) $\rightarrow$ inferencia $\rightarrow$ Población = 8 estimado de $\mu = 7.5$.

Tomemos por ejemplo una compañía como la compañía Ford. Si la empresa desea introducir un nuevo producto al mercado, sería absurdo pretender que toda la población pruebe el producto. En este caso, se da a probar el producto a una muestra de consumidores y con base a los resultados de esa muestra se decide si el producto se elabora o no.

Ahora bien, como los resultados obtenidos a partir de una muestra difieren de los resultados que se obtendrían si se observara la población total o universo, existe un riesgo al tomar la decisión. Es en este caso que se utiliza la PROBABILIDAD como una medida de riesgo.

Experimento aleatorio y determinístico

Experimento aleatorio: es aquel que al repetirlo varias veces, se obtienen resultados diferentes en forma aleatoria (al azar). Ejemplo: al realizar la medición del tiempo en que se tardan en contestar un examen de conocimientos, los estudiantes aspirantes para entrar al Colegio de Bachilleres del Plantel Villa de Seris; es decir, es aquel que no se puede prever el resultado.

Experimento determinístico: Es aquel que nos proporciona siempre el mismo resultado. Ejemplo: Un ingeniero químico, al determinar el número de moléculas de hidrógeno y oxígeno que hay en el agua (H_2O) siempre encontrará que es el mismo, no cambia.

Se puede prever el resultado.
¿Cómo se distingue un fenómeno determinístico de un aleatorio?
En los determinísticos podemos prever el resultado.
En los aleatorios no se puede prever el resultado debido a su naturaleza aleatoria, ya que se tienen varios resultados.

EJERCICIO 9

Instrucciones.
Indicar para cada una de las siguientes situaciones si se trata de un fenómeno aleatorio o un fenómeno determinístico.

a) La próxima vez que viaje en camión me sentaré junto a una anciana.
b) Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí.
c) Al terminar el mes de marzo comienza el mes de abril.
d) Cinco más cinco es igual a diez.
e) La próxima vez que asista al cine me tocará sentarme en la fila 18.
f) Cuando prenda el televisor veré un niño en la pantalla.
g) La mermelada de fresa tiene sabor dulce.
h) Al tirar un dado quedará 6 en la cara superior.
i) La próxima cosecha será mejor que la de este año.
j) El próximo año México seguirá teniendo la deuda externa.

Espacio Muestral (S). El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento, pudiendo ser también el equivalente del conjunto universal en términos de la teoría de conjuntos.

Ejemplo 1. Al lanzar un dado al aire y observaremos los posibles resultados siguientes en que puede caer un dado.
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} por lo tanto el espacio muestra que se denota con S tendrá seis posibles resultados y no más resultados puesto que las caras de un dado solo tienen seis caras
S = {6} (seis elementos simples).

Ejemplo 2. Para el lanzamiento de dos monedas tendremos de acuerdo al conjunto potencia.
$2^2 = 4$, donde la base representa el número de caras de la moneda y el exponente el numero de monedas por lo tanto;

S = { SS ,CS, SC,SS }, S = { 4 } (Cuatro elementos compuestos).

EJERCICIO 10

Instrucciones. Indica el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Se sacan tres bolas una tras otra, sin reemplazamiento (sin introducir de nuevo la que se saca), de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3.
b) Se sacan dos bolas, una tras otra, con reemplazamiento (introduciendo la que se saca), de una urna que contiene dos bolas numeradas 1 y 2.
c) Se sacan dos bolas, con reemplazamiento, de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3.
d) Lanzar dos monedas al aire.
e) Lanzar tres monedas.

El espacio muestral se clasifica en dos tipos:
Espacio Muestral Discreto: Es aquel en el cual los resultados se pueden enumerar.
Espacio Muestral Continuo: Este se define en intervalos de la recta de los números reales.

Los espacios muestrales discretos a su vez se dividen en dos tipos:
Espacios muestrales discretos **finitos.**
Espacios muestrales discretos **infinitos**

Ejemplo 1 de un Espacio Muestral discreto finito es:
Experimento: Lanzamiento de un dado
S = {1, 2, 3, 4, 5,6}, ya que podemos prever el número de resultados posibles

Ejemplo 1 de un Espacio Muestral discreto infinito.
Experimento: Observar el número de intentos en que se obtiene un 6 por primera vez al lanzar un dado.

Evento. Es el resultado de un experimento .Cuando cada evento es seleccionado al azar, el experimento se denomina aleatorio o al azar. Pudiendo ser todos los posibles subconjuntos del espacio muestral.

Evento Simple (E). Cada uno de los posibles resultados de un experimento y que no se puede descomponer.

En el caso del lanzamiento del dado, cada uno de los posibles números en la cara del dado es un evento simple ya que no se puede descomponer en otros eventos cuando los eventos se representan en un diagrama de Venn) se denominan puntos Muestrales.

Evento Compuesto. Los eventos A, B, C, etcétera, son eventos compuestos si se componen de dos o más eventos simples.

Ejemplos de eventos simples y compuestos

Evento simple: Si lanzamos un dado al aire
A = {evento que salga un # impar}
A = {1, 3, 5}
B = {el número sea $\leq$ 4 } = { 1, 2, 3, 4 }

Evento Compuesto: Lanzamiento de dos monedas
A = el evento de observar una cara
A = {HH, HT, TH, TT }

Evento seguro: *Es decir que siempre puede ocurrir, por lo tanto:*
Es un conjunto que contiene todos los elementos S;

Evento imposible: *Aquel es imposible que ocurra, por lo tanto:*
Es el conjunto vacío, F= { } .

EJERCICIO 11

Instrucciones.
Ordene desde el menos probable hasta el más probable los siguientes eventos. Si hubiera eventos imposibles y eventos seguros, señálelos.

a) El dueño de la tiendita vivirá 105 años.
b) La próxima semana no tendrá día martes.
c) En el mes de octubre lloverá en el D.F.
d) El próximo 1º de enero comenzará otro año.
e) El próximo animal mamífero que vea en la calle será un perro.
f) Si tiro un dado obtendré un 6.
g) Obtendré calificación aprobatoria en el examen de Matemáticas.
h) El próximo bebé que nazca en su familia será varón.

Existen diferentes maneras de representar un espacio muestral particular. Consideremos dos de ellas:

A) Mediante una tabla de contingencia, B) mediante un diagrama de Venn

A) Tabla de Contingencia o de clasificación cruzada. En una tabla de frecuencia los datos se organizan de modo que sólo consideramos una variable a la vez. A los fines de estudiar de manera simultánea la repuesta de dos variables categóricas, se utiliza lo que se conoce como una tabla de contingencia. Para este tipo de tabla se establece una clasificación cruzada entre las variables analizadas. Por ejemplo, se puede relacionar mediante una tabla de contingencia las variables sexo (m, f) y el área de estudio (concentración); sexo y rango académico; ventas de productos por área geográfica y tipo de productos, etcétera.

El ejemplo que se presenta a continuación clasifica las variables por rango académico y sexo.

TABLA DE CONTINGENCIA

RANGO ACADÉMICO

Sexo	Instructor	Auxiliar	Asociado	Profesor	Total
Hombre	100	170	80	50	400
Mujer	90	145	50	25	310
TOTAL	190	315	130	75	710

B) DIAGRAMAS DE VENN

Unión de eventos. La unión de los conjuntos A y B es la colección de elementos que pertenecen a uno u otro de los conjuntos o a ambos. El evento unión de los eventos A y B se realiza cuando sucede alguno de los dos o ambos.

Decimos que el evento "A o B" se realiza cuando sucede A o sucede B o suceden ambos.

Para regresar al ejemplo de los dados:
Si A es el evento de que el resultado sea non; A = { 1, 3, 5 } y B es el evento de que el resultado sea mayor que dos; B = { 3, 4, 5, 6 }. A ó B es el evento que se realiza cuando el resultado del dado está en cualquiera de las dos colecciones o sea: A ó B = {1, 3, 4, 5, 6}.

Hay un caso en que los dos significados coinciden y es cuando los dos eventos no pueden ocurrir juntos. Por ejemplo: Niño o niña. A dos eventos que no pueden ocurrir juntos se les llama **excluyentes.**

En la notación de los conjuntos dos eventos son excluyentes cuando su intersección es el Vacío.

Intersección de eventos. La intersección de los conjuntos A y B es la colección de los elementos que se encuentran en ambos. En algunos casos esta colección no contiene a ningún elemento, en ese caso decimos que la intersección es vacía y que los conjuntos **son ajenos o mutuamente excluyentes.**

Decimos que el evento "A y B" se realiza cuando el resultado del experimento cabe dentro de la definición de A y también cabe dentro de la definición de B. Es decir, "A y B" sucede sólo cuando ambos eventos suceden al mismo tiempo.

Ejemplo: Piense en que se tiran dos monedas.
Si el evento A es que caiga a lo más un águila, este evento en forma de conjunto Es {SS, SA, AS}, y si el evento B es que caiga águila la primera moneda, el evento es {AS, AA} En este caso si pueden ocurrir los dos eventos juntos; el evento A y B sucede cuando las monedas caen AS.

ENFOQUES DE LA PROBABILIDAD

INTUITIVO: es aquel basado en la experiencia previa sin la justificación de algún cálculo. Por ejemplo, en épocas de lluvias se puede afirmar a priori que existe una probabilidad de 0.1 de que no llueva en uno de los días de tal temporada.

DE FRECUENCIA RELATIVA: es en el que la probabilidad se obtiene como una proporción del número de veces en que sucede un evento en una serie prolongada de experimentos repetidos.

Ejemplo, cierto estudio reveló que 353 de 741 graduados en administración de empresas no estaban empleados según su principal área de estudios ¿Cuál es la probabilidad de que un graduado específico en administración de empresas esté empleado en un área distinta a la principal de sus estudios?

FENÓMENO: un fenómeno es la ocurrencia de un hecho o suceso.
Los que nos interesan son aquellos fenómenos los cuales podemos observar.

EXPERIMENTO: es un fenómeno observable perfectamente definido.
Ejemplos de experimentos: Lanzamiento de un dado, lanzamiento de una moneda, un mazo de cartas, bolas en una urna, etc.
Dentro de los fenómenos observables tenemos los determinísticos y los aleatorios.

Determinísticos. Se puede prever el resultado.
Aleatorios: no se puede prever el resultado (aleatorio).

PROBABILIDAD DE UN EVENTO. (ESPACIOS EQUIPROBABLES)
La probabilidad de un evento A, P(A) es la suma de las probabilidades de todos los puntos de muestreo contenidos en el evento A. Es la suma de la frecuencia relativa que A ocurra en n intentos; es decir:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$ (Regla de Laplace)

Donde n(A) es el número de veces que ocurre el evento en el experimento aleatorio, en caso de ser en espacios equiprobables cada uno de los eventos tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Y n(S) es el espacio muestral del experimento aleatorio

EJEMPLO 1: Una urna tiene ocho bolas rojas, cinco amarillas y siete verdes. Si extrae una bola aleatoriamente, determinar la probabilidad de que sea:

a) Que sea Roja.

Determinaremos primero el espacio muestral de este experimento aleatorio.

S= {8 rojas, 5 amarillas y 7 verdes} $\Longrightarrow$ n(S)=20

El evento de que la bola sea roja será:

n(A)={ Sea roja } $\Longrightarrow$ n(A)= 8 ; Por lo tanto la probabilidad de que salga roja de la urna será:

a) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{20}$; Simplificando tenemos $\frac{2}{5} \cong 0.4$

b) Sea Amarilla.

Procediendo como en el inciso anterior, la probabilidad será:
n(B) = { Sea amarilla} $\Longrightarrow$n(B)= 5 . Por lo tanto la probabilidad será:

$$P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \cong 0.25$$

c) Sea verde

n(C) ={ Sea verde} $\Longrightarrow$n(C)=7. Por lo tanto la probabilidad de sacar una bola verde será:

$$P(C) = \frac{7}{20} \cong 0.35$$

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.
   $0 \leq P(A) \leq 1$

2. La probabilidad del suceso o evento seguro es 1.
   P(E) = 1

Lo cual podemos generalizar también como:
   P(S)=1

3. Si A y B son incompatibles o Ajenos, es decir $A \cap B = \varnothing$ entonces:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1. La suma de las probabilidades de un suceso o evento y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$P(A)^C = 1 - P(A)$$

2. Probabilidad del suceso o evento imposible es cero.

$$P(\varnothing) = 0$$

3. La probabilidad de la unión de dos sucesos o eventos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. La probabilidad de la unión de tres sucesos o eventos es semejante a la propiedad 3.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

5. Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$Si A \subseteq B, entonces P(A) \leq P(B)$$

6. Si $\varnothing$ es el conjunto vació, y A y B son dos eventos o sucesos cualesquiera, entonces:

$$P(A \backslash B) = P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ i.e. } P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

Siguiendo el ejemplo 1 descrito anteriormente si ahora aqueremos determinar las siguientes probabilidades

d) Que no sea roja

Para determinar la probabilidad de que no sea roja nos basaremos en la propiedad 2 descrita anteriormente

$$P(\text{No roja}) = P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \cong 0.6$$

e) Que no sea amarilla

$$P(\text{No amarilla}) = P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \cong 0.75$$

f) Que sea roja y amarilla

Nos pide que determinemos $P(A \cap B)$ es decir que simultáneamente saquemos una bola roja y amarilla; esto es un evento imposible ya que sólo se nos permite extraer una bola de la urna por lo tanto:

$$P(A \cap B) = \varnothing$$

EJEMPLO 2. En una baraja de 40 cartas, la probabilidad de sacar

a) Un *AS*.

b) Cartas que contengan solamente OROS.

a) $P(AS) = \dfrac{\text{No. de ases}}{\text{No. de cartas}} = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

b) $P(OROS) = \dfrac{\text{No. de oros}}{\text{No. de cartas}} = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

EJERCICIO 12

En los siguientes experimentos determina la probabilidad de cada uno de los sucesos o eventos que se te piden:

a). Que salga un número par al lanzar un dado normal

b.) Que aparezca cuando menos un sello al lanzar tres monedas normales

c). Que aparezca una esfera blanca al extraer una sola esfera de una urna que contiene cuatro bolas blancas, tres rojas y cinco azules.

Probabilidades utilizando axiomas y propiedades.

Ejemplo 1. Si A y B son dos sucesos o eventos aleatorios con las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{3}{8}\ ,\ \mathrm{P(B)} = \frac{1}{2}\ ,\ \mathrm{P}(A \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{4}$$

Hallar: a) P $(A \cup B)$, b) P (A^C), c) P(B^C), d) P$(A^C \cap B^C)$, e) P$(B \cap A^C)$

a) P $(A \cup B)$

Aplicando la propiedad 3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

P $(A \cup B)$ = $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8} = 0.625$

b) P (A^C)

Aplicando la propiedad 1. $P(A)^C = 1 - P(A)$

P $(A^C) = 1 - \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8} = 0.625$

c) P (B^C)

$P(B)^C = 1 - P(B)$

P $(B^C) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

d) $P(A^C \cap B^C)$

Utilizando la ley de De Morgan 6 de la tabla 4.1;

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ tendremos lo siguiente:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$

e) $P(B \cap A^C) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

Ejemplo 2. Se tiene un espacio muestral que consta de los siguientes 4 elementos: $S = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$, con las siguientes probabilidades asignadas.

a) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{5}$

b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{5}$

c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{8}$

d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = 0$

¿Cuál de las siguientes funciones define un espacio de probabilidad?

a) a) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{5}$

De acuerdo con el axioma1. $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$ Si sumamos las cuatro probabilidades $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 1$ es decir; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \leq 1$

La suma de las cuatro funciones nos da un resultado de $\frac{77}{60}$ es decir, mayor que 1 por lo tanto no es una función de probabilidad S

b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = -\frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{1}{5}$

Puesto que una función de probabilidad no puede ser negativa en este caso:

$a_3 = -\frac{1}{4}$, La función no define un espacio de probabilidad.

c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, de acuerdo con el axioma 2, P(S)=1

Si sumamos: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1$. Por lo tanto la función define un espacio de probabilidad

d) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = 0$

Si sumamos: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=1$. Por lo tanto la función define un Espacio de probabilidad

Ejemplo 3. Se Saca una esfera de una urna que contiene cuatro esferas rojas, cinco blancas y seis negras. Determina la probabilidad de que la esfera sea:
a) Roja o blanca
b) Que no sea blanca

a) Roja o blanca.

R={rojas}; B={blancas}. Como no se pueden sacar dos esferas simultaneas entonces:

$P(R \cap B) = \varnothing$. Entonces tendremos: $P(R \cup B) = P(R) + P(B)$ (Axioma 3)

$P(R \cup B) = \frac{4}{15}+\frac{5}{5}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0.6$

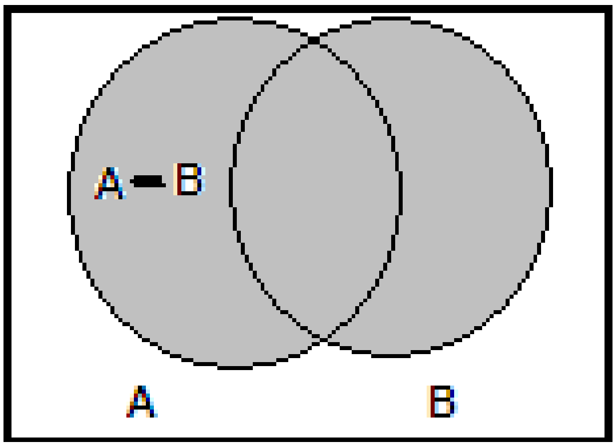
b) Que no sea blanca

$P(B^C) = 1 - P(B) = 1-\frac{5}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}=0.6\overline{6}$

Ejemplo 4. Probar para dos sucesos o eventos cualesquiera A Y B. La propiedad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A \cup B$ Puede descomponerse en los sucesos o eventos A\ B= A-B y B. como se muestra en el siguiente diagrama de Venn.



A $\cup$ B está sombreado

A $\cup$ B=(A\ B) $\cup$ B; así sustituyendo la propiedad 6 . P(A) - P(A $\cap$ B), en (A\ B) tendremos

A $\cup$ B= P(A) - P(A $\cap$ B) +P(B). Reacomodadado los términos tendremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

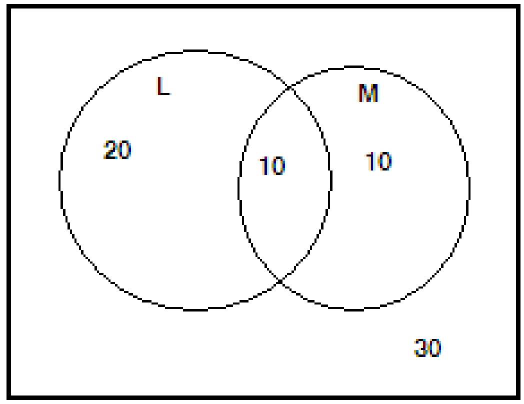
Ejemplo 5. De un total de 100 alumnos, 30 estudian matemáticas, 20 estudian música y 10 estudian al mismo tiempo matemáticas y música. Si se escoge aleatoriamente un estudiante. Determina la probabilidad de que:

a) Estudie sólo música.
b) Sólo matemáticas.
c) Matemáticas y música.
d) Matemáticas o música.
e) No estudien ninguna de las dos asignaturas.
f) Matemáticas pero no música.

Para visualizar mejor el ejercido dibujaremos un diagrama de Venn.

Designemos los eventos L y M como:
L = {estudiantes de matemáticas}
M = {estudiantes de Música}

Espacio muestral(S)= 100



a) Estudie sólo música

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0.1$$

b) Sólo Matemáticas

$$P(L) = \frac{n(L)}{n(S)} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2$$

c) Matemáticas y música

$$P(L \cap M) = \frac{n(L \cap M)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0.1$$

d) Matemáticas o música

$$P(L \cup M) = \frac{n(L) + n(M) + n(L \cap M)}{n(S)} == \frac{20 + 10 + 10}{100} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Al sumar n(L $\cap$ M) no contradice la propiedad 3, vista anteriormente ya que la podemos calcular mediante la propiedad de la siguiente manera:

$$P(L \cup M) = \frac{n(L) + n(M) - n(L \cap M)}{n(S)} == \frac{30 + 20 - 10}{100} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Y da el mismo resultado

e) No estudien ninguna de las dos asignaturas

$$P(L \cup M)^C = \frac{n(L \cup M)^C}{n(S)} = \frac{30}{100} = \frac{15}{50} = 0.3$$

f) Matemáticas pero no música

$$\mathrm{P(M^{C})} = \frac{n(M^{C})}{n(S)} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Ejemplo 6. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

a) La Probabilidad de que sea 7.
b) La probabilidad de que el número obtenido sea par.
c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

Primeramente obtendremos el espacio muestral para dos dados

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1),\ (1,2),\ (1,3)\ldots\ldots\ldots\ldots..(1,6) \\ (2,1),\ (2,2),(2,3)\ldots\ldots\ldots\ldots..(2,6) \\ (3,1),\ (3,2),(3,3)\ldots\ldots\ldots\ldots..(3,6) \\ (4,1),\ (4,2),(4,3)\ldots\ldots\ldots\ldots..(4,6) \\ (5,1),\ (5,2),(5,3)\ldots\ldots\ldots\ldots..(5,6) \\ (6,1),\ (6,2),(6,3)\ldots\ldots\ldots\ldots..(6,6) \end{array} \right.$$

a) La Probabilidad de que sea 7

P(La suma de puntos sea 7) = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

$$\mathrm{P(7)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6}$$

b) La probabilidad de que el número obtenido sea par.

P(La suma de puntos sea par) = {(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6)
(3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6)
(5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)}

$$\mathrm{p(2)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} = 0.5$$

c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres

P(La suma de puntos sea múltiplo de 3) = {(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6)
(4,2),(4,5),(5,1)(5,4),(6,3)(6,6)}

$$\mathrm{P(Multiplo\ \ de\,3)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = 0.3\bar{3}$$

EJERCICIO 13

En los siguientes ejercicios determina lo que se te pide:

1. Si A y B son dos eventos aleatorios con las siguientes probabilidades:

$$P(A^c) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar:

a) P(A), b) P (B), c) $P(A \cap B^c)$,

2. ¿Qué función define un espacio de probabilidad en S= { a_1, a_2, a_3}, con las siguientes probabilidades asignadas:

a) $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{2}{3}$

c) $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$

3. Probar mediante un diagrama de Venn la siguiente propiedad:

$P(A) - P(A \cap B)$

4. La Comisión Nacional del Agua (CNA) informa que en la ciudad de Cananea Sonora, durante los 90 días del invierno anterior, llovió 40 días, nevó en 30 días, y además en 12 días llovió y nevó. Si se eligiese un día al azar de ese invierno, encontrar la probabilidad de que haya:

a) Llovido o nevado
b) Nevado solamente
c) Llovido pero no nevado
d) No haya nevado ni llovido

5. ¿Qué es más probable, ¿que caiga dos sellos y un águila al lanzar tres monedas o que la suma de puntos al lanzar dos dados sea mayor que 8?

Probabilidad en espacios no equiprobables: La probabilidad para cada suceso o evento o punto muestral no tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Ejemplo 1. Una moneda está cargada de tal manera que la probabilidad de que caiga un águila es el doble de que caiga un sello. Encuentra la probabilidad de que:

a) Caiga águila
b) Caiga sello

La probabilidad de que caiga sello= { S); Y la probabilidad de que caiga águila= {A} Entonces la probabilidad de que caiga sello será:

P(S) = p y P(A) = 2p;

Utilizando el Axioma de probabilidad 1, donde la suma de todas las probabilidades igual a uno se tiene:

p+2p = 1 $\Rightarrow$ 3p=1 despejando p se tiene: $p = \frac{1}{3}$

La probabilidad de que caiga sello es: $\frac{1}{3}$; por lo tanto la probabilidad de que caiga águila será: $\frac{1}{3} + 2p = 1$ es decir:

$2p = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; por lo tanto la probabilidad de que caiga águila será:

P(A)= $\frac{2}{3}$

Ejemplo 2. Un dado está cargado de tal manera que la probabilidad de que aparezca un número cuando se lanza el dado es proporcional a un número dado (Por ejemplo 6 tiene dos veces la probabilidad de aparecer que la que tiene 3). Halla la probabilidad de que:

a) Caiga un número par o un número primo.
b) Caiga un número impar.
c) Caiga un número par pero no un primo

A= {número par}
B= {número primo}
C= {número impar}

S={ p(1) =p, p(2)=2p, p(3) =3p..............p(6)=6p}

Si P(S) =1 $\Rightarrow$ p+2p+3p+4p+5p+6p= 1; sumando se tiene:

21p=1 de donde $p = \frac{1}{21}$; entonces:

$$P(1) = \frac{1}{21}, P(2) = \frac{2}{21}, P(3) = \frac{1}{7}, P(4) = \frac{4}{21}, P(5) = \frac{5}{21}, P(6) = \frac{2}{7}$$

A= {número par}= P (2, 4,6) = $\frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

B= {número primo}=P (2, 3,5) = $\frac{2}{21} + \frac{1}{7} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$

C= {número impar}=P(1, 3, 5) = $\frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{5}{21} = \frac{3}{7}$

a) Caiga un número par o un número primo: Es la unión de los eventos A y B es decir: $A \bigcup B = \{2, 4, 6, 3, 5\}$, para simplificar, hallar más fácilmente el complemento; es decir, que no ocurra 1. Por lo tanto, será:

$$P(A \bigcup B) = 1 - P(1) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

b) Caiga un número impar: El evento de que ocurra un número impar será: $B \bigcap C = \{3,5\}$ entonces $P(B \bigcap C) = P(\{3,5\})$

$$P(\{3,5\}) = \frac{1}{7} + \frac{5}{21} = \frac{8}{21}$$

c) Caiga un número par pero no un primo: El evento de que ocurra A pero no B es $A \bigcap B^C$ es decir $\{4,6\}$; por lo tanto, será:

$$P(A \bigcap B^C) = \frac{4}{21} + \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$$

EJERCICIO 14

En los siguientes ejercicios determina lo que se te pide:

1. En una competencia de natación intervienen tres jóvenes que llamaremos A, B y C. Por su trayectoria en este tipo de competencias, sabemos que la probabilidad de que gane A es el doble de la de B y la probabilidad de que B gane es igual a la de C. Encontrar la probabilidad de que:
   - a) A gane
   - b) No gane B
   - c) Ganen A o C

2. Halla la probabilidad obtener el 6 en un lanzamiento.

Teoría de combinatoria

La Teoría Combinatoria es una herramienta en la estadística que ayuda a resolver los problemas que se presentan al estudiar y cuantificar las diferentes agrupaciones (ordenaciones, colecciones, etc. que podemos formar con los elementos de un conjunto.

El objeto del Análisis combinatorio o Combinatoria es el estudio de las distintas ordenaciones que pueden formularse con los elementos de un conjunto, de los distintos grupos que pueden formarse con aquellos elementos y de las relaciones entre unos y otros grupos.

Suponiendo que la señora de la casa donde nos hospedamos al ir a una ciudad distinta donde vivimos nos hace el favor de vendernos la comida solamente sabe cocinar cuatro tipos de sopas (sopa con verduras, de pasta, de arroz y de plátano); además, sólo sabe hacer tres tipos de platos fuertes (con frijoles, con lentejas y con verduras); sabe hacer, además, postre de natas, de guayaba y arroz con leche, y sólo da agua con la comida.

¿Qué posibilidades de almuerzo tenemos para hoy?

Entonces las posibilidades son:

1. Sopa de verduras con frijoles, postre de natas y agua
2. Sopa de verduras con lentejas, postre de natas y agua
3. Sopa de verduras con verduras, postre de natas y agua
4. Sopa de pasta con frijoles, postre de natas y agua
5. Sopa de pasta con lentejas, postre de natas y agua
6. Etc.

Alguno dirá: "¡Cambie de restaurante!" (y tendrá razón)... y otros observarán todas las posibles variaciones que se pueden generar: Aún siendo tan pequeño el menú, sólo enunciamos 5 de 36 posibilidades para la comida de hoy. Por lo tanto, no es fácil hacer el conteo para todas esas variaciones y más si se hace una por una. Por ello, existen técnicas que sin duda facilitan notablemente los conteos de todas las posibilidades existentes.

Técnicas de conteo

LISTAS

Una lista es una sucesión ordenada de objetos, que se escriben entre paréntesis y separando los elementos por comas. Por ejemplo, la lista (1, 2, 3, $\varnothing$) es una lista cuyo primer elemento es el 1, el segundo el 2, el tercer elemento es el 3 y el cuarto elemento es el conjunto de los números enteros.

El orden en que aparecen los elementos en una lista es de suma importancia, así la lista (2, 4,6) es diferente de la lista (6,4,2) y de la lista (4,2,6), sin importar que los elementos sean los mismos.

Los elementos en una lista pueden repetirse como en (2,2, 3).

La longitud de una lista es la cantidad de elementos que tiene la lista, así en todos los ejemplos anteriores la longitud es de tres, mientras que la lista (2, 4, 6,8) tiene una longitud de cuatro.
Una lista de longitud dos tiene el nombre especial de par ordenado.

Una lista de longitud cero se llama lista vacía y se representa por un paréntesis sin elementos en él: ( ). Con frecuencia, las coordenadas de un punto en un plano se especifican mediante un par ordenado de números reales (x, y).

Conteo de listas de dos elementos o par ordenado.

Ejemplo. Se desea hacer una lista de dos elementos, en los lugares de la lista pueden estar cualquiera de los dígitos 2, 4, 6 o 8. ¿Cuántas listas con estas características son posibles? La forma más directa de responder es escribiendo todas las posibilidades:

(2,2)	(2,4)	(2,6)	(2,8)
(4,2)	(4,4)	(4,6)	(4,8)
(6,2)	(6,4)	(6,6)	(6,8)
(8,2)	(8,4)	(8,6)	(8,8)

Hay 16 listas posibles.

Se organizan las listas de manera que estemos seguros de que no hemos repetido ni olvidado alguna. El primer renglón de la tabla contiene todas las listas posibles que comienzan con 2, el segundo las que comienzan con cuatro y así sucesivamente. Vemos que como el segundo elemento de cada lista corresponde a la columna, entonces la primera columna comienza con el primer elemento que es el 2, la segunda columna con el cuatro y así sucesivamente. Por todo lo anterior hay 4 filas y cuatro columnas o **4x4 = 16 listas** posibles con los cuatro dígitos 2, 4, 6 y 8.

De esta forma nos preguntamos ahora ¿Cuántas listas son posibles de dos elementos en las que haya n opciones para el primer elemento y m opciones para el segundo? Supongamos que los elementos posibles en la primera posición de la lista son los enteros del 1 al n y los posibles para la segunda posición son los enteros del 1 al m. Como antes tenemos la siguiente tabla con las diferentes posibilidades:

1,1)	(1,2)	(1,3) ...	(1,m)
(2,1)	(2,2)	(2,3) ...	(2,m)
(3,1)	(3,2)	(3,3) ...	(3,m)
.	.	.	.
:	:	:	:
(n,1)	(n,2)	(n,3) ...	(n,m)

Hay n filas o renglones (con el primer elemento igual en cada una de las listas), y cada fila contiene m listas. Por consiguiente la cantidad de listas posibles es:

$$m + m + m + ... + m = m \times n \quad (\text{ n veces})$$

PRINCIPIO DE CONTEO. Con frecuencia se presenta la necesidad de calcular el número de maneras distintas en que un suceso se presenta o puede ser realizado. Otras veces es importante determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento específico. En ambos casos se apela al sentido común, o se establecen métodos que permitan sistematizar tales cálculos.

Iniciaremos nuestro estudio de teoría combinatoria enunciando los principios aditivo y multiplicativo de conteo.

Principio aditivo de conteo: Sean A y B dos sucesos que no pueden ocurrir simultáneamente. Si A ocurre de a maneras distintas y B ocurre de b maneras distintas, el número de maneras en el cual puede ocurrir A o B es A +B

Ejemplo 1: Se tienen seis banderas de señalización, dos rojas, dos verdes y dos azules. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con una o dos banderas a la vez?
Si denotamos las banderas rojas, verdes y azules por R, V y A, respectivamente, vemos que con una bandera a la vez se pueden hacer 3 señales distintas:

R , V , A

Con dos banderas a la vez se puede hacer las siguientes señales (sacando, por ejemplo, una primera y después la otra); es decir:

RR, RV. RA, VR, VV, VA, AR, AV, AA

Por lo que si se utilizan dos banderas, se pueden hacer 9 señales distintas. Luego, con una o dos banderas se podrán realizar 3+9= 12 señales diferentes. Observa que, como se establece en la definición, se trata de dos sucesos A y B descritos como:

A: Se hacen señales con una sola bandera
B: Se hacen señales con dos banderas.

En el caso de que existan más de un suceso a observar, habría que contar el número de veces que pueden ocurrir todos los sucesos que se desean observar, para ello se utiliza el principio fundamental de conteo:

Si un suceso A presenta n_1 maneras diferentes y una vez este suceso ha ocurrido un segundo suceso B se puede presentar en n_2 maneras diferentes y así cuando ha ocurrido este, sucede un tercer suceso C que se puede presentar en n_3 maneras diferentes, y así diferentes sucesos en n_k formas, entonces el número total de maneras diferentes como pueden darse simultáneamente los sucesos es:

$n_1 * n_2 * n_3 * .... * n_k$

Volviendo al ejemplo inicial de los almuerzos, entonces los posibles menús con sus 4 sopas, 3 platos fuertes, 3 postres y agua se hubiesen podido contar más fácilmente así:
4*3*3*1=36 posibles menús.

Ejemplo 1: Un equipo de baloncesto tiene que elegir un nuevo uniforme. Para ello debe escoger entre 4 camisetas y 5 pantalones con diferentes colores. ¿Cuántos uniformes distintos se pueden componer con las camisetas y pantalones disponibles?

Para resolver este problema hemos de tener en cuenta que cada una de las camisetas se podrá combinar con cada uno de los pantalones disponibles. Si tuviéramos una única camiseta, podríamos componer 5 uniformes diferentes, resultado de combinar dicha camiseta con cada uno de los 5 pantalones.

Si tuviéramos 2 camisetas, podríamos componer 5 uniformes distintos para cada camiseta, resultado de combinar cada camiseta con cada uno de los 5 pantalones. Tendríamos por tanto $2 \cdot 5 = 10$ combinaciones posibles.

Siguiendo el mismo razonamiento, llegaríamos a la conclusión de que con 4 camisetas y 5 pantalones, podríamos componer $\mathbf{4 \cdot 5 = 20}$ uniformes diferentes

Ejemplo 2 En la cafetería de una escuela se tiene el siguiente menú para vender:

1. Hamburguesa
2. Hamburguesa con queso
3. Pizza

Como bebidas se ofrecen:
- a) Refresco
- b) Agua
- C) Te helado

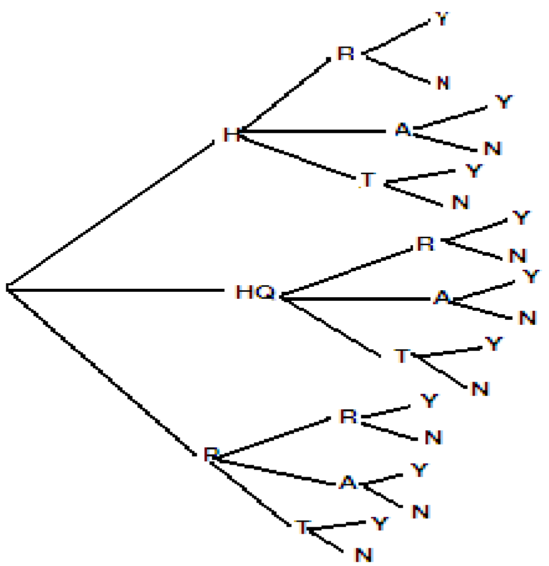
Como postre se puede elegir:
- A) Yogurt
- B) Nieve

¿De cuántas maneras puede una persona elegir un menú en esta escuela?
De acuerdo al principio multiplicativo, el número de maneras será: $3 \text{ X } 3 \text{ X } 2 = 18$ maneras.

Diagrama de árbol

Un **diagrama de árbol** es una representación gráfica que ilustra las formas en las que se llevan a cabo las agrupaciones de elementos
En el caso del ejemplo anterior el diagrama de árbol lo podemos representar de la siguiente forma:

H= hamburguesa , HQ= hamburguesa con queso, P= pizza
R= Refresco, A= Agua, T= Te heladoY= Yogurt, N= Nieve



RESULTADOS
HRY
HRN
HAY
HAN
HTY
HTN
HQRY
HQRN
HQAY
HQAN
HQTY
HQTN
PRY
PRN
PAY
PAN
PTY
PTN

En todo problema combinatorio hay varios conceptos claves que debemos distinguir:
1. **Población**: Es el conjunto de elementos que estamos estudiando. Denominaremos con **m** al número de elementos de este conjunto.
2. **Muestra.** Es un subconjunto de la población. Denominaremos con **n** al número de elementos que componen la muestra.
Los diferentes tipos de muestra vienen determinados por dos aspectos:
a) Orden: es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
b) Repetición: la posibilidad de repetición o no de los elementos.

Factorial de un número natural

Es el producto de los "n" factores consecutivos desde "n" hasta 1. El **factorial de un número** se denota por **n!**
n! = n. (n-1). (n-2). (n-3).....3. 2. 1

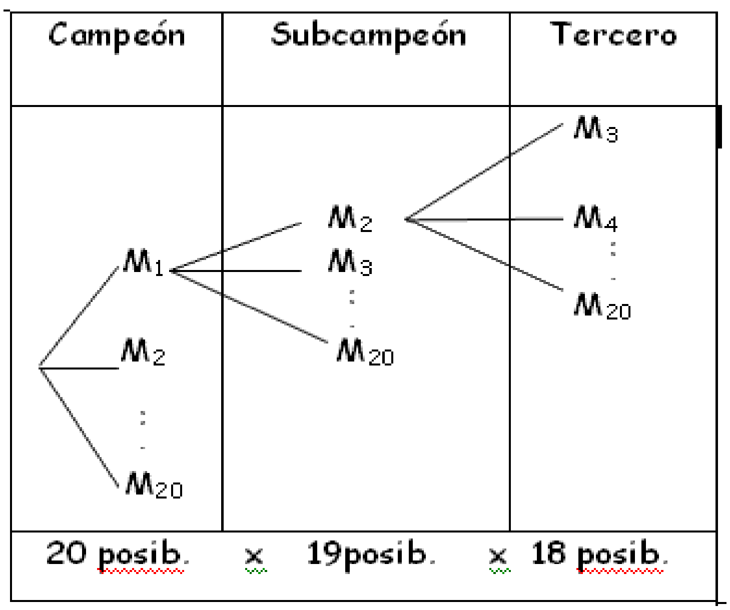
0! = 1 por definición
2!= 2 .1 = 2
3!= 3.2.1 = 6
4!= 4.3.2.1=24
5! =5.4.3.2.1= 120

Variaciones sin repetición

En una carrera de carros participan 20 corredores. Teniendo en cuenta que no es posible llegar al mismo tiempo, ¿de cuántas maneras podrán llegar a la meta los tres primeros?

Elegimos una notación adecuada, por ejemplo m1, m2... m20, para representar a los 20 corredores. Para la primera posición (campeón) hay 20 posibilidades; para la segunda posición (subcampeón) hay 19 posibilidades, y para el tercer puesto hay 18 posibilidades.

Por lo tanto, hay 20,19.18=6840 formas distintas de quedar los tres primeros clasificados.
El diagrama de árbol quedará de la siguiente manera:



Variaciones ordinarias o variaciones sin repetición

Se llama **variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n (m ≥ n)** a los distintos grupos formados por n elementos de forma que:

a) **No** entran todos los elementos.
b) Sí **importa el orden**.
c) **No** se repiten los elementos.

Numero de variaciones ordinarias
Hemos obtenido el número de formas de clasificarse 20 corredores para obtener los tres primeros puestos: 20x19x18.

En general, si hallamos el número de variaciones sin repetición que se pueden formar con n elementos tomados m a m, obtendremos:

Vn,m =	n	(n-1)	(n-2)	...	(n-m+1)	

Por lo tanto el número de variaciones que se pueden formar con n elementos tomados con:

m=0 será: n,$V_{n,0}$ no tiene sentido

Con n=1 será: $V_{n,1}$= n

Con n=2 será: $V_{n,2}$ = n(n-1)(n-2)

Con n=3 será : $V_{n,3}$ = n(n-1)(n-2)(n-3)

Con n=n será: Vn,n = n(n-1)(n-2)(n-3) ...3·2·1. Es decir:

También podemos calcular las **variaciones** mediante **factoriales**:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Las **variaciones** se denotan por: V_m^n o Vm, n

Ejemplos:
Calcular las variaciones de 6 elementos tomados de tres en tres

$$V_6^3 = 6 \bullet 5 \bullet 4 = 120$$
$$V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \bullet 5 \bullet 4 \bullet 3!}{3!} = 6 \bullet 5 \bullet 4 = 120$$

EJEMPLO 1. Se desea formar una sociedad compuesta por tres personas: Alejandra (A), Carlos (C) y Wilson (W), entre los cuales se van a designar dos cargos importantes: Representante Legal y Tesorero. Si la primera posición es para el Representante legal y la segunda para el Tesorero tenemos las siguientes posibilidades:

(A,C), (A, W)

(C,A), (C, W)

(W,A), (W,C)

Para este caso siempre quedaría uno de ellos sin un cargo, porque son 3 elementos (m=3) tomados 2 cada vez (n=2). Es decir

$$V_3^2 = 3 \bullet 2 = 6$$

EJEMPLO 2. Si todos quieren quedar con un cargo, digamos ahora que entre los 3 socios (m=3)

Y (n=3)· Esto significa que se van a elegir como Presidente de la Mesa directiva y los cargos de Representante Legal y tesorero. En este caso tenemos:

$$V_3^3 = 3 \bullet 2 \bullet 1 = 6$$

también 6 posibilidades, pero ahora tenemos: (A,C,W), (A,W,C) (C,A,W), (C,W,A), (W,A,C), (W,C,A y así cada uno de los socios tiene un cargo y estarán felices.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación $V_{n,4} = 20V_{n,2.}$

Como $V_{n,4} = n(n-1)(n-2)(n-3)$ y $V_{n,2} = n(n-1)$ y $m \geq 4$
Sustituyendo en la ecuación tendremos:
$n(n-1)(n-2)(n-3) = 20n(n-1) \Rightarrow \Rightarrow$
$(n-2)(n-3) = 20$

$$\frac{\cancel{n(n-1)}(n-2)(n-3)}{\cancel{n(n-1)}} = 20$$

Multiplicando término a término se tiene: n^2 -2n-3n+6-20=0. Si agrupamos lo términos semejantes tendremos: n^2- 5n-14=0

Si factorizamos la ecuación de segundo grado como: (n-7)(n+2)=0, una de las raíces de la ecuación será : n=7

EJEMPLO 4. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 12 alumnos en los cuatro asientos de la primera fila de la clase?

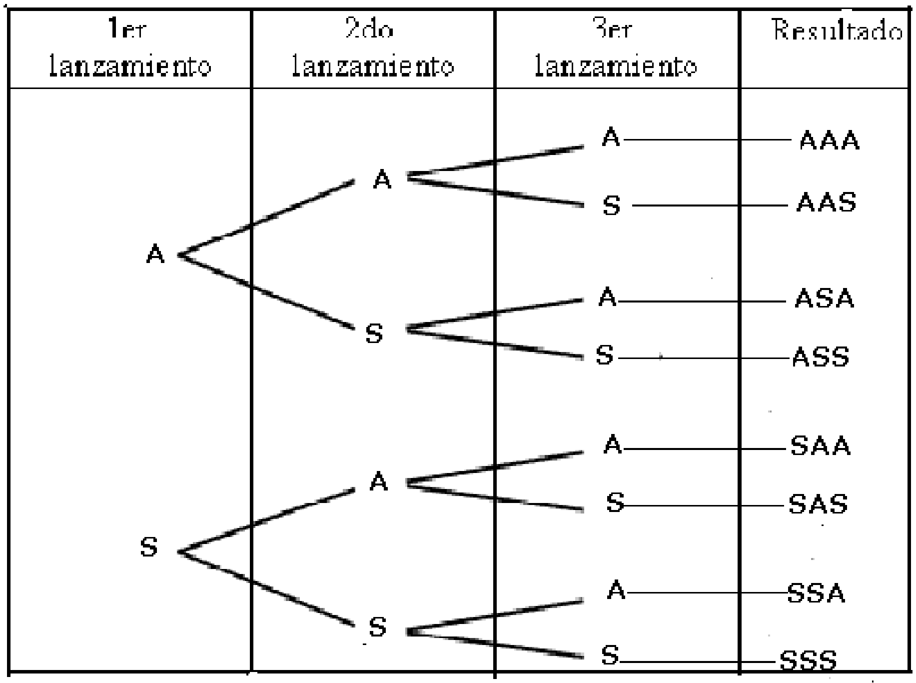
Calcularemos el número de variaciones de 12 elementos (m=12) tomados de a cuatro cada vez (m = 4): es decir:

$$V_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = \frac{12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 \bullet 8!}{8!} = 12 \bullet 11 \bullet 10 \bullet 9 = 11880$$

Es decir: 11,880 formas distintas.

Variaciones con repetición.

Ejemplo: si lanzamos al aire una moneda tres veces consecutivas obteniendo en cada caso águila o sello ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?
Si forma



Las distintas ordenaciones que acabamos de obtener se llaman variaciones con repetición de dos elementos tomados de tres cada vez.
Observamos que ahora sigue influyendo el orden, como en el caso anterior, pero además los elementos se pueden repetir:

Variaciones con repetición

Se llama **variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n** a los distintos grupos formados por n elementos de manera que:

a) No **entran todos los elementos si m > n.** Sí **pueden entrar todos los elementos si m ≤ n**
b) Sí **importa el orden.**
c) Sí **se repiten los elementos**.

El número de variaciones con repetición de n elementos tomando m cada vez se representa por:

$$VR_m^n = m^n$$

Número de Variaciones con Repetición.

Hemos hallado el número de resultados distintos que se obtienen al lanzar tres veces una moneda: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

De la misma forma, podemos hallar el número de resultados distintos que se obtienen al lanzar:

- Una vez una moneda: 2.

- Dos veces una moneda: $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ (Di cuáles son estas posibilidades)

En (n) veces una moneda: $2 \cdot 2 \cdot 2... \cdot 2 = 2^n$.

En general, si queremos hallar el número de variaciones con repetición que se pueden formar con n elementos tomados de a m cada vez, obtendremos:

$VR_m^n = m \bullet m \bullet m \bullet ....m = m^n$ (n factores)

EJEMPLO 1. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si se pueden repetir las cifras?
Tenemos que hallar el número de variaciones con repetición de 10 elementos tomados de a tres, es decir: $VR_{10}^3 =$ $= 10^3 = 1000$
Ahora bien, de estos 1000 números habrá muchos que inicien con cero, como por ejemplo: 035, 099, 001 por lo cual no se pueden considerar de tres cifras. Por esto debemos descontar estos números, y tendremos: Es decir: 900 números

EJEMPLO 2. Se lanzan tres dados de distintos colores una vez. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? Son: $VR_6^3 = 6^3 = 216$; es decir, 216 resultados diferentes.

Ejemplo:
Resolver: $VR_X^2 + VR_{X-2}^2 = 224$
Como $VR_X^2 = X^2$ y $VR_{X-2}^2 = (X-2)^2$, sustituyendo

$x^2 + 5 (x-2)^2 = 244$

$x^2 + 5 (x^2-4x + 4) = 244$

$x^2 + 5x^2-20x + 20 = 244$

$6x^2 - 20x - 224 = 0$, resolviendo la ecuación cuadrática

$x = 8$ o $X = -14/3$
La solución válida es $x=8$ ya que la otra solución carece de sentido.

EJERCICIO 15

Resuelve los siguientes ejercicios sobre variaciones

1. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?
2. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

PERMUTACIONES

Hasta aquí hemos contado listas de elementos de diversas longitudes, en las que permitimos o prohibimos la repetición de los elementos. Un caso especial de este problema es contar las listas de longitud n formadas por un conjunto de n objetos, en las que se prohíbe la repetición. En otras palabras, se desea tener n objetos en listas, usando cada objeto exactamente una vez en cada lista.

Se llama permutaciones de m elementos (m = n) a las diferentes agrupaciones de esos m elementos de forma que:

a) Sí entran todos los elementos.
b) Sí importa el orden.
c) No se repiten los elementos.

De esta forma una permutación es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos. Arreglos que se puedan distinguir:

a) Si se quieren arreglar objetos, donde todos los objetos sean diferentes entre sí, la permutación (el número de arreglos que se pueden obtener) es n! (n factorial); es decir,

$P_{n=n!}$ Donde P_n significa permutación

Ejemplo 1. Calcular las permutaciones de 6 elementos.

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Ejemplo 2. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?

1) Sí entran todos los elementos. De 5 dígitos entran sólo 3.
2) Sí importa el orden. Son números distintos el 123, 231, 321.
3) No se repiten los elementos. El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes

$$P_5 = 5! = 5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 = 120$$

Ejemplo 3. ¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras abc?

Los siguientes arreglos son: **abc, acb, bac, bca, cab y cba**.
Son 6 permutaciones diferentes es decir:

$$P_3 = 3! = 3 \bullet 2 \bullet 1 = 6$$

Vemos que hay efectivamente 3 opciones para la primera posición (cualquiera de las letras a, b o c), luego quedan sólo dos opciones para la segunda posición (por ejemplo si se escogió a para la primera posición, quedarían b o c para la segunda posición), y quedaría una sola letra para la tercera posición.

b. **Las variaciones sin repetición (Permutaciones sin repetición)** también se pueden representar con factoriales, según: Si se quieren arreglar n objetos diferentes, pero se van a tomar m objetos de ellos los cuales son distinguibles entre sí, entonces:

$$V_m^n = P_m^n = \frac{m!}{(n-m)!} \text{ O } {}_nP_m$$

Ejemplo 1 ¿Cuántas palabras se pueden formar con ocho letras de forma que dos de ellas estén siempre juntas y guardando el mismo orden?

Como las dos letras siempre van a estar juntas y en el mismo orden, las podemos considerar como si fuera una sola letra. Por esta razón es una permutación realmente de sólo siete elementos:

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ palabras diferentes

Ejemplo 2. ¿De cuántas formas se pueden colocar a 3 vendedores en 3 diferentes ciudades, si los vendedores están disponibles para cualquiera de 5 ciudades?

Es decir: ¿De cuántas formas podríamos ubicarlos?

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \bullet 4 \bullet 3 \bullet 2!}{2!} = 5 \bullet 4 \bullet 3 = 60$$

Tenemos 60 formas posibles de ubicarlos en las 5 ciudades

PERMUTACIONES CIRCULARES

Es un caso particular de las **permutaciones**.
Se utilizan cuando los elementos se han de ordenar "en círculo", (por ejemplo, los comensales en una mesa), de modo que el primer elemento que "se sitúe" en la muestra determina el principio y el final de muestra. La fórmula para calcular este tipo de permutaciones es:

$$PC_n = (n-1)!$$

Ejemplo 1. Calcular las permutaciones circulares de 7 elementos:

$PC_7 = (7-1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Ejemplo 2. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?

$$PC_8 = P_{8-1} = P_7 = (8-1)! = 7! = 5040$$

PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Permutaciones con repetición de m elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces,... (m = a + b + c +... = n) son los distintos grupos que pueden formarse con esos m elementos de forma que:

a) Sí entran todos los elementos
b) Sí importa el orden.
c) Sí se repiten los elementos
La fórmula para calcular este tipo de permutaciones es: $PR_n^{a,b,c,..} = \dfrac{P_n}{a!b!c!}$

Ejemplo1. Calcular las permutaciones con repetición de: $PR_{12}^{6,4,2} = \dfrac{12!}{6!4!2!}$

$$PR_{12}^{6,4,2} = \frac{12!}{6!4!2!} = \frac{\cancel{12}\bullet 11\bullet 10\bullet 9\bullet 8\bullet 7\bullet \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cancel{4}\bullet \cancel{3}\bullet 2\bullet 1\bullet 2\bullet 1} = \frac{11\bullet 9\bullet 8\bullet 7}{4} = 13860$$

Ejemplo 2. Un apostador tiene el presentimiento de que en la próxima jornada futbolística (en un torneo nacional con 20 equipos) ganarán 9 equipos en casa, empatarán 3 y ganarán en campo contrario (de visitantes) 2 ¿Cuántas apuestas deberá realizar para asegurarse con un total de 14 equipos?

$$PR_{14}^{9,3,2} = \frac{14!}{9!3!2!} = \frac{14\bullet 13\bullet 12\bullet 11\bullet 10\bullet 9!}{9!\bullet 3\bullet 2\bullet 2} = 14\bullet 13\bullet 11\bullet 10 = 20020$$

EJERCICIO 16

Resuelve los siguientes ejercicios sobre permutaciones
1. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres cartas sucesivas de una baraja de 52 cartas, si las cartas no se pueden repetir?
2. El Ayuntamiento de Hermosillo desea formar placas para automóvil que contengan las siguientes características:
a) Considerando el alfabeto de 28 letras y 10 dígitos ¿Cuántas placas se podrán fabricar considerando que la placa podrá tener tres letras que no se podrán repetir seguidas de tres dígitos donde el primer dígito deberá ser diferente de cero?
b) Si consideramos ahora que las letras se pueden repetir y los dígitos pueden ser cualquiera ¿cuántas placas se pueden fabricar?
3) Encontrar n, si P(n,4)=42P(n,29)

COMBINACIONES

Se llama **combinaciones de m elementos tomados de n en n (m ≥ n)** a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

a) No entran todos los elementos.
b) No importa el orden.
c) No se repiten los elementos.

La fórmula que relaciona la s variaciones con las combinaciones es la siguiente:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Las combinaciones se pueden calcular también mediante factoriales que es la fórmula más utilizada para resolver problemas. Que es la siguiente:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Ejemplo 1. Calcular **el número de combinaciones** de 10 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{10}^4 = \frac{10 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7}{4 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 1} = 210$$

$$c_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)} = \frac{10!}{4!(6)!} = \frac{10 \bullet 9 \bullet \cancel{8} \bullet 7 \bullet \cancel{6!}}{\cancel{4} \bullet 3 \bullet \cancel{2} \bullet 1 \bullet \cancel{6!}} = 10 \bullet 3 \bullet 7 = 210$$

Ejemplo 2. Un alumno tiene que elegir 7 de 10 preguntas de un examen.

a) ¿De cuántas maneras puede elegirlas?
b) ¿Y si las primeras cuatro son obligatorias?

a) ¿De cuántas maneras puede elegirlas?

El orden que elija no importa, que además no pondrán repetirse es decir :

$$C_{10,7} = \frac{10!}{7!(10-7!)} = \frac{10!}{7!(3!)} = 120 \quad \text{maneras}$$

b) ¿Y si las primeras cuatro son obligatorias

Si las primeras cuatro son obligatorias, debe de escoger 3 preguntas de entre las 6 restantes para completar las 7 necesarias, resultando un total de:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \bullet 5 \bullet 4}{3 \bullet 2} = 20$$

Es decir de 20 maneras

Ejemplo 3. En una frutería ofrecen entre sus productos distintas mezclas con zumos de frutas. El cliente puede seleccionar entre 6 zumos de frutas diferentes y obtener algún sabor en particular de la mezcla de dos zumos en partes iguales. ¿Entre cuántos sabores distintos puede el cliente hacer su pedido?

Representaremos cada zumo con las letras A, B, C, D, E y F. Al mezclar dos zumos y teniendo en cuenta que el orden no influye, se podrían obtener los siguientes sabores:

AB	BC	CD	DE	EF
AC	BD	CE	DF	
AD	BE	CF		
AE	BF			
AF				

Es decir, 15 sabores diferentes. Luego:

$$C_{6,2} = 15$$

¿Cómo podemos obtener este resultado matemáticamente? Como vimos de la definición:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$ Es decir: $$V_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$$

y $P_2 = 2! = 2$. De aquí $C_{6,2} = \dfrac{30}{2} = 15$

EJERCICIO 17

Resuelve los siguientes ejercicios sobre combinaciones

1. Como respuesta a un anuncio de trabajo se presentan 15 personas para cubrir tres cargos administrativos ¿Cuántos grupos diferentes de tres personas se pueden formar?
2. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con ocho puntos en el plano si nunca hay tres de ellos alineados?
3. En una bolsa hay 6 esferas verdes y 5 blancas ¿De cuántas formas se pueden sacar 4 esferas sin importar el color?

Ejercicios de combinatoria con probabilidad

Ejemplo 1. En un taller trabajan 6 hombres y cuatro mujeres. Por sorteo se han escogido 7 personas al azar. Hallar la probabilidad de que entre las personas seleccionadas haya tres mujeres.

Como el orden no importa y las personas no se pueden repetir, las selecciones son combinaciones sin repetición.

El espacio muestral será el total de de personas combinación con las escogidas

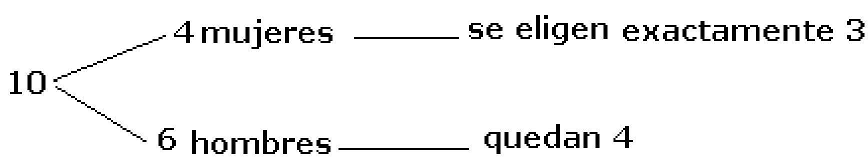
aleatoriamente es decir:

$$C_{10,7} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

El número de casos favorables va depender de como se interprete la expresión “haya tres mujeres”, pues existe ambigüedad entre “haya exactamente tres mujeres“ y “haya al menos tres mujeres”.

Resolveremos el ejercicio de las dos maneras:

Si el número de mujeres es exactamente 3. El número de casos favorables será:

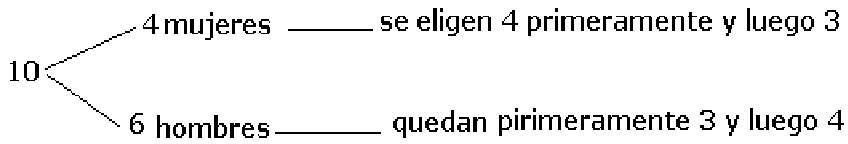


Es decir:

$$C_{4,3} \bullet C_{6,4} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \bullet \frac{6!}{4!(6-4)!} = 4 \bullet 15 = 60$$

Es decir: $\frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0.5$

Si el número de mujeres es al menos 3 mujeres, o bien 3 mujeres o 4 mujeres, como ambos casos son mudamente excluyentes o ajenas entonces se obtendrán las combinaciones por separado y se sumaran de acuerdo con la **propiedad 3;** es decir:



Por tanto, el número de combinaciones posibles será:

$$C_{4,4} \bullet C_{6,3} + C_{4,3} \bullet C_{6,4} = 4 \bullet 3 \bullet 5 + 5 \bullet 4$$

Es decir, el número de combinaciones entre el espacio muestral aplicando la regla de Lapalace tendremos:

$$\frac{4 \bullet 3 \bullet 5 + 5 \bullet 4}{10 \bullet 3 \bullet 4} = \frac{3+1}{2 \bullet 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.66$$

Bibliografía General

- HERNÁDEZ Lerma Onésimo, Elementos de Probabilidad y Estadística, Fondo de Cultura Económica, México, 1979; 2nd. Printing 1982.
- HOEL, Paul G., Estadística elemental, Editorial CECSA, México, 1966
- JOHNSON, Kuby, Estadística elemental. Tercera edición, Editorial Thompson, México, 1999.
- LINCON, Chao, Introducción a la Estadística, Editorial CECSA, 1992.
- LIPSCHUTZ, Seymour. Matemáticas finitas. McGraw-Hill, México, 1992.
- LIPSCHUTZ Seymour, Probabilidad, Editorial McGraw-Hill, 2da Edición, 2001.
- MEYER, Paul L. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Fondo Educativo Interamericano S.A. México, México, 1973.

Páginas de Internet

- http://www.bioestadistica.uma.es/libro/
- http://www.bioestadistica.uma.es/libro/node89.htm
- http://www.bioestadistica.uma.es/libro/node87.htm
- www.estadistico.com/dic.html